Zur Beschreibung relativistischer Teilchen höheren Spins im elektromagnetischen Feld

WOLFGANG O. ULRICI

Sektion Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. **27 a**, 339—362 [1972]; eingegangen am 29. November 1971)

The Description of Relativistic Particles with Arbitrary Spin in the Electromagnetic Field

Starting with the equations of the center-of-mass motion and spin motion of a particle in a homogeneous electromagnetic field, we derive the Hamiltonian and the wave equation of a relativistic particle with arbitrary spin and arbitrary magnetic moment in this field. We change from the canonical representation to spinor representations with convenient transformation properties, and we find a form of the wave equation which, for the special case of spin 1/2, coincides with the Dirac equation (in the form first given by Feynman). The problems and limitations of this derivation are extensively discussed.

Bezeichnungsweise

In dieser Arbeit benutzen wir Einheiten, in denen $\hbar = c = 1$ wird.

Die Operatoren der Teilchenobservablen schreiben wir mit großen, ihre Eigenwerte mit kleinen Buchstaben. Beim Impulsoperator kennzeichnen wir den kanonischen Impuls durch K, um diesen gegen den kinetischen Impuls P abzusetzen.

Die hermitesch Konjugierte einer Matrix D bezeichnen wir mit D^*.

Wir gebrauchen bei räumlichen Vektoren und Vierervektoren eine kovariante Schreibweise. Einen Index, der alle vier Werte 0, 1, 2, 3 durchläuft, bezeichnen wir durch einen griechischen Buchstaben, einen für die Werte 1, 2, 3 durch einen lateinischen. a^μ sind die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors $a = (a^0, \boldsymbol{a})$, die kovarianten definieren wir durch

$$a_\mu := g_{\mu\nu}\, a^\nu \tag{0.1}$$

mit $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$. Dabei benutzen wir die Einsteinsche Konvention, über doppelt auftretende Indizes zu summieren. Verallgemeinernd beziehen wir auch Spinindizes in diese Konvention ein. Das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b ist dann

$$a\, b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - a^i b^i = a^0 b^0 - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,. \tag{0.2}$$

Wir definieren den vollständig antisymmetrischen Einheits-Vierertensor,

$$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} = \begin{cases} +1 \text{ für gerade Permutationen von } (0\,1\,2\,3), \\ -1 \text{ für ungerade Permutationen von } (0\,1\,2\,3), \\ \;\;0 \text{ sonst}, \end{cases} \tag{0.3}$$

und den vollständig antisymmetrischen räumlichen Einheitstensor,

$$\varepsilon^{ikl} := \varepsilon^{0ikl}\,. \tag{0.4}$$

Für das Produkt solcher Tensoren gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\,\delta^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\mu\nu\varrho\sigma} \\ \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\, \varepsilon^{\mu\beta\gamma\delta} &= -\,\delta^{\beta\gamma\delta}_{\nu\varrho\sigma} \\ \varepsilon_{ikl}\, \varepsilon^{imn} &= -\,\delta^{mn}_{kl} \\ \varepsilon_{ikl}\, \varepsilon^{ikn} &= -\,2\,\delta^n_l\,; \end{aligned} \tag{0.5}$$

dabei haben wir die Determinante

$$\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} := \begin{vmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\alpha_\nu \\ \delta^\beta_\mu & \delta^\beta_\nu \end{vmatrix} \tag{0.6}$$

und die analog definierten Determinanten $\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\varrho}$, $\delta^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\mu\nu\varrho\sigma}$ benutzt. — Die negativen Vorzeichen in Gl. (0.5) sind auf die verwandte Metrik zurückzuführen.

Wir gebrauchen die Differentialoperatoren

$$\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu\,.$$

Die elektrischen Potentiale werden im Vektor des Viererpotentials $A = (\Phi, \boldsymbol{A})$ zusammengefaßt. Wir definieren den antisymmetrischen Vierertensor

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{0.7}$$

und identifizieren

$$\begin{aligned} F_{0i} &= E^i\,, \\ F_{kl} &= \varepsilon_{kli}\, B^i \end{aligned} \tag{0.8}$$

(mit der Umkehrung $B^i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikl} F_{kl}$) mit den Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes.

Sonderdruckanforderungen an Dr. W. O. ULRICI, Sekretariat Symphonie, 53 Bonn, Friedrich-Ebert-Allee 130.

1. Einführung

Seitdem DIRAC im Jahre 1928 seine berühmte Gleichung aufstellte und sie erfolgreich auf das Wasserstoffspektrum anwandte[1], hat es an Versuchen nicht gefehlt, sie auf die Beschreibung von Teilchen höheren Spins als 1/2 im elektromagnetischen Feld zu erweitern. Eine konsistente Lösung für Spins $s > 1$ ist bisher jedoch nicht gefunden worden[2,3]. In dieser Arbeit werden wir, von den auf spinnende Teilchen wirkenden Kräften ausgehend, eine in schwachen, homogenen Feldern in erster Näherung konsistente Wellengleichung für Teilchen beliebigen Spins ableiten. —

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens vom Spin 1/2, z.B. eines Elektrons, ist nach Dirac ein vierkomponentiger Spinor, der die Gleichung

$$\gamma^\mu K_\mu \psi(x) = m \psi(x) \tag{1.1}$$

erfüllt. Die γ^μ sind hierbei 4×4-Matrizen, die auf komplizierte Weise mit dem Spin des Teilchens zusammenhängen; sie sind untereinander durch die Beziehungen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \tag{1.2}$$

verknüpft. Die Dirac-Gleichung hat die bequeme Eigenschaft, daß sie die Ankopplung der elektromagnetischen Wechselwirkung auf sehr einfache Weise gestattet, nämlich durch die eichinvariante Ersetzung

$$K_\mu \to K_\mu - q A_\mu(x). \tag{1.3}$$

Die Gleichung

$$\gamma^\mu (K_\mu - q A_\mu(x)) \psi(x) = m \psi(x) \tag{1.4}$$

beschreibt die Wechselwirkung des Elektrons mit dem elektromagnetischen Feld genau, sofern man von Strahlungskorrekturen absieht. Besonders frappiert dabei die im wesentlichen richtige Voraussage des gyromagnetischen Verhältnisses von dem spinmagnetischen Moment zum Spin des Elektrons zu

$$\mu_s = q/m_{l\mathrm{e}}, \qquad q = -l_{\mathrm{e}0}, \tag{1.5}$$

d.h., zum Doppelten des gyromagnetischen Verhältnisses von dem bahnmagnetischen Moment zum Bahndrehimpuls[4],

$$\mu_{\mathrm{B}} = q/2 m_{l\mathrm{e}}.$$

Aus diesem Grunde wurde der Weg, den Dirac beschritten hatte, als theoretisch grundlegend angesehen, und man nahm an, daß ein analoges Verfahren auch für Teilchen höheren Spins zum Ziel führen könne.

Die Suche nach Gleichungen für freie Teilchen höheren Spins als eins, die bei minimaler Ankopplung der elektromagnetischen Wechselwirkung gemäß Gl. (1.3) diese Teilchen im Feld auf konsistente Weise beschreiben, blieb ohne Erfolg[3]. Tung fand die folgende Erklärung dafür: Die Wellenfunktion eines freien Teilchens transformiert sich mit einer Darstellung der Poincaré-Gruppe. Verlangt man, daß sie sich auch noch unter Lorentztransformationen einfach, d.h. mit einer endlichen Darstellung der homogenen, eigentlichen, orthochronen Lorentz-Gruppe transformiert, und fordert man weiter für die Wellenfunktion eines freien Teilchens Invarianz unter Raumspiegelung, so findet man, daß man mit einer Darstellung zum Spin s auch stets die zu ihr konjugierte braucht; für die Wellenfunktion eines freien Teilchens werden deshalb i.a. mehr Komponenten benötigt als nur die $(2s+1)$, die seinem Spin entsprechen. Die Beziehungen, welche die Komponenten untereinander verknüpfen — für Spin 1/2 bilden sie gerade die Dirac-Gleichung (1.1)[3,6] —, geben nun Anlaß zu Gleichungen der Art

$$(K^2)^n \psi = m^{2n} \psi, \tag{1.6}$$

welche Geisterlösungen mit komplexen Massen besitzen, sobald $n > 1$ wird; $n = 1$ ist anscheinend nur für $s \leqq 1$ möglich[7]. Bei freien Teilchen eliminiert man natürlich die Geister durch die Bedingung

$$K^2 \psi = m^2 \psi. \tag{1.7}$$

Führt man aber die elektromagnetische Wechselwirkung gemäß Gl. (1.3) ein, so stellt jetzt diese Nebenbedingung eine zusätzliche, nichttriviale Gleichung, welche die Konsistenz des Gleichungssystems zerstört. Unter den Gleichungen, die ohne Nebenbedingungen auskommen und daher die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes in widerspruchsfreier Weise erlauben, sind die Klein-Gordon-, die Dirac- und die Proca-Gleichung für die Spins 0 bzw. 1/2 und 1.

Diese Überlegung zeigt, daß der beschriebene Weg für höheren Spin nicht zum Ziele führen kann. Daraus schließen wir, daß er eben nicht grundlegend richtig ist, und wir fragen uns, welche der dort gestellten Forderungen wir aufgeben können.

Als erstes bemerken wir: Tung verlangt unbewiesen, daß die Wellengleichung invariant sein müsse gegenüber den Transformationen, unter welchen die zu beschreibenden Phänomene invariant sind, hier insbesondere gegenüber Raumspiegelung. Da aber die Wellenfunktion erst in Verbindung mit einer Vorschrift, welche angibt, wie die Erwartungswerte von Observablen zu bilden sind, physikalische Bedeutung besitzt, kann diese Forderung möglicherweise durch eine schwächere ersetzt werden. In der Tat ist beispielsweise in der Feynmanschen Formulierung der Dirac-Gleichung (1.4)[8,9,10] die Wellengleichung für das Elektron im elektromagnetischen Feld

$$[(K-qA)^2+2q\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}+i\,\boldsymbol{E})]\,\varphi(x)=m^2\,\varphi(x) \quad (1.8\,\mathrm{a})$$

nicht gegenüber Raumspiegelung invariant; sie geht dabei über in

$$[(K-qA)^2+2q\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}-i\,\boldsymbol{E})]\,\chi(x)=m^2\,\chi(x) \quad (1.8\,\mathrm{b})$$

(vgl. Abschnitt 4.5). Trotzdem sind die elektromagnetischen Effekte invariant gegenüber Raumspiegelung[11]. Das liegt daran, daß die Matrixelemente für die elektromagnetische Wechselwirkung in den beiden Zweierspinoren φ und χ symmetrisch gebildet werden[12]. (Da jeder der beiden Zweierspinoren sich aber als Funktion des anderen ausdrücken läßt, ist die Theorie ihrem Wesen nach zweikomponentig und nicht vierkomponentig.) Die Wellengleichung braucht also durchaus nicht die Invarianzen der physikalischen Phänomene wiederzugeben, nur von ihrer Interpretation verlangen wir es.

Zweitens ist es nicht richtig, daß wie im Falle spinloser Teilchen auch für Teilchen mit Spin das elektromagnetische Feld in erster Näherung in die Wellengleichung nur auf dem Wege der minimalen Kopplung gemäß Gl. (1.3) eingeht[13,14]. Schon das Proton wird nicht mehr durch die Dirac-Gleichung (1.4) beschrieben; man korrigiert sie nach Pauli durch einen kovarianten Zusatzterm[15,16].

Einen Hinweis auf einen Weg zu relativistischen Gleichungen gibt uns die Bemerkung, daß wir von der Auswertung der Experimente her ja recht gut die nichtrelativistischen Gleichungen für Teilchen im elektromagnetischen Feld kennen. Im Falle des Elektrons ist die Pauli-Gleichung[17] eine gute Näherung:

$$H\,\psi(x)=\left\{\frac{(\boldsymbol{K}-q\boldsymbol{A})^2}{2m}+qA^0-\frac{q}{m}\,\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}+\frac{q}{2m^2}\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E})\right\}\psi(x); \quad (1.9)$$

mit geeigneten Faktoren vor den Spintermen sollte eine Gleichung dieser Art auch für andere Teilchen mit Spin gelten[14]. Nun ändert sich für das Teilchen nichts, wenn sich der Beobachter selbst mit hoher Geschwindigkeit an ihm vorbeibewegt. Die Frage ist nur, wie lautet jetzt, vom Beobachter aus gesehen, seine Bewegungsgleichung? Durch Lorentz-Transformation sollte sie sich erschließen lassen.

Wir finden, daß der folgende im Prinzip einfache Weg zum Ziele führt: Wir gehen aus von den Bewegungsgleichungen eines spinnenden Teilchens im Ruhesystem. Sind sie bekannt, so können wir im klassischen Sinne behaupten, die Bewegung des Teilchens vollständig zu übersehen: die Gleichungen in einem bewegten System erhält man einfach durch Lorentz-Transformation. Nach dem Korrespondenzprinzip gilt dies auch in der Quantenmechanik für die Mittelwerte der Observablen des Teilchens.

Um die Wellenphänomene des Teilchens zu beschreiben, benötigen wir allerdings den Hamilton-Operator, der die zeitliche Veränderung der Observablen selbst erzeugt. Als brauchbar beim Aufsuchen des Hamilton-Operators wird sich allein die Eigenzeitformulierung der Hamiltonschen Gleichungen[18,19] erweisen, welche die Veränderung der Observablen in der Eigenzeit des Teilchens mit dem Kommutator mit dem Hamilton-Operator verbindet.

Im nächsten Schritt werden wir die erhaltene Gleichung auf Spinorform bringen und den Zusammenhang mit der Dirac-Gleichung [in der Feynmanschen Formulierung (1.8)] herstellen. Dabei bedienen wir uns der Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe zu endlichen Massen.

Die Schwierigkeiten, auf die wir im Laufe der Untersuchung stoßen, umgehen wir, indem wir konsequent die Näherung wählen, in der sie nicht mehr auftreten. Wir betrachten keine Strahlungskorrekturen, doch beschränken wir uns ferner auch auf homogene, hinreichend schwache Felder. Wir machen diese Annahmen, um zumindest in erster Näherung eine brauchbare Gleichung zu erhalten, die wir auch begründen können.

Bei der Suche nach der Lösung schätzen wir uns glücklich, zumindest für das Elektron eine in sehr guter Näherung gültige relativistische Gleichung zur Verfügung zu haben, nämlich die Dirac-Gleichung in ihren verschiedenen Formen. An ihr konnten wir uns orientieren und unsere Theorie testen. Insbesondere nützt uns die von Feynman angegebene Formulierung, Gl. (1.8).

Schließlich erhalten wir als eleganteste Lösung unseres Problems eine Differentialgleichung zweiter

Ordnung für einen $(2s+1)$-komponentigen Spinor. Mit einer Vorschrift zur Bildung von Matrixelementen zusammen beschreibt sie das Verhalten eines einfachen Teilchens im hinreichend schwachen, homogenen elektromagnetischen Feld.

Unter einem einfachen Teilchen verstehen wir eines, das durch die Werte für Masse, Ladung, Spin und spingyromagnetisches Verhältnis ausreichend charakterisiert wird. Einfach ist z. B. ein Li_3^7-Kern in genügend schwachen Feldern, d.h., solange wir nicht auf die zusätzlichen Freiheitsgrade achten müssen, die mit seiner Zusammensetzung aus Nukleonen zu tun haben. Er hat die Masse $m = 6.963687\, m_p$, die Ladung $q = 3 l_{e0}$, den Spin $s = 3/2$ und das gyromagnetische Verhältnis $\mu = 3.256\, l_{e0}/2 m_p$, wobei m_p die Masse des Protons und l_{e0} die Elementarladung bedeuten [20].

2. Ableitung des Hamilton-Operators für ein relativistisches Teilchen

Um die Wellengleichung für ein relativistisch bewegtes Teilchen herzuleiten, schlagen wir den Weg über die Bewegungsgleichungen ein. Sind sie im Ruhesystem bekannt, so bekommt man ihre relativistische Form auf eindeutige Weise durch Lorentz-Transformation. Für sie ist dann der Hamilton-Operator zu finden.

Für Teilchen mit Spin gibt es zwei Bewegungsgleichungen, eine für die Schwerpunktsbeschleunigung und eine für die Spinbewegung.

2.1. *Schwierigkeiten bei der Beschleunigungsgleichung; Definition der benutzten Näherung*

Auf Schwierigkeiten stoßen wir bei der Aufstellung der Beschleunigungsgleichung im Ruhesystem für ein Teilchen in inhomogenen Feldern. Betrachten wir den Fall des Elektrons, für das der nichtrelativistische Hamilton-Operator, der der Pauli-Gleichung nämlich, gut bekannt ist:

$$H = \frac{(\boldsymbol{K} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + qA^0 - \frac{q}{m}\boldsymbol{S}\boldsymbol{B} + \frac{q}{2m^2}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}). \tag{2.1}$$

Um den Operator der Beschleunigung zu bestimmen, brauchen wir zunächst den des kinetischen Impulses, der sich im Heisenberg-Bild ergibt zu

$$\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{X}} = i\,m[H,\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{K} - q\boldsymbol{A} + \frac{q}{2m}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{S}. \tag{2.2}$$

In der daraus abgeleiteten Beschleunigungsgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}} &= i[H,\boldsymbol{P}] + \partial_0\boldsymbol{P}\\ &= q(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{X}}\times\boldsymbol{B}) - \frac{q}{m}\,\partial(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}) + \frac{q}{2m}\,\partial_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{S})\\ &\quad + \frac{q}{2m^2}[-\,\partial\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{S})\\ &\quad + (\boldsymbol{P}\,\partial)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{S})] + O(q^2)\end{aligned} \tag{2.3}$$

tritt $\mu = q/m$ linear einmal in Verbindung mit $\partial(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B})$ und zweitens mit $\frac{1}{2}\partial_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{S})$ auf, wenn wir ins Ruhesystem gehen. Dieser letzte, zusätzliche Term ist bisher nicht verstanden. Nach dem Korrespondenzprinzip nämlich sollte sich der Mittelwert des Impulses in derselben Weise zeitlich verändern wie der Impuls des klassischen Gegenstücks, hier also der Impuls irgendeines Kreisels im Feld.

Versuchen wir deshalb, einen Kreisel genauer zu begreifen, z.B. eine sich drehende Hantel, auf deren Massen Ladungen sitzen. In der Beschleunigungsgleichung werden erwartungsgemäß zeitlich veränderliche Felder ins Spiel kommen, man hat mit retardierten Kräften und daher relativistisch zu rechnen. Das relativistische Zweikörperproblem ist nicht allgemein gelöst. Es läßt sich näherungsweise aber umgehen: Wir stellen uns die Hantel mit sehr ungleich verteilten Massen vor, so daß wir im wesentlichen nur die Bewegung der kleinen Masse zu berücksichtigen haben, um die Auswirkung der Hanteldrehung auf die Schwerpunktsbewegung zu studieren. Doch gelang es dem Verfasser nicht, auf diese Weise eine zusätzliche zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{E}$ in der Beschleunigungsgleichung zu erklären. Eine nicht unwichtige Frage stellten dabei die Zwangskräfte, die eingeführt werden mußten, um im Ausdruck für das magnetische Moment einen konstanten Drehimpuls zu garantieren, wie wir es von dem Modell eines spinnenden Elektrons verlangen. Auch hier mißlang dem Verfasser eine befriedigende Antwort. Solange dieses Problem ungelöst bleibt, wagen wir es nicht, ein spinnendes Teilchen im inhomogenen Feld zu behandeln.

Wir beschränken uns daher auf homogene Felder. In der klassischen Beschleunigungsgleichung im Ruhesystem,

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = (q/m)\,\boldsymbol{E}, \tag{2.4}$$

tritt der Spin dann nicht auf. Wir bemerken aber, daß der Pauli-Hamilton-Operator (2.1) auch noch weitere, in den Feldern nichtlineare Ausdrücke in der Beschleunigungsgleichung liefert, nämlich

$$(q^2/2m^3)[(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B})\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{S}\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}] + O(q^3). \tag{2.5}$$

Diese Terme verhalten sich zu dem führenden Ausdruck (2.4) betragsmäßig wie $\eta:1$, wobei η der Größenordnung nach gleich

$$\eta \cong \lambda\!\!\!^{-} \cdot |q\boldsymbol{E}|/m; \qquad \lambda\!\!\!^{-} = 1/m \tag{2.6}$$

ist. $\lambda\!\!\!^{-}$ ist die Compton-Wellenlänge des betrachteten Teilchens und $m/|q\boldsymbol{E}|$ die Strecke, auf der das elektrische Feld dem Teilchen eine kinetische Energie vom Betrage seiner Ruheenergie erteilt. Zahlenbeispiel: Für ein Elektron auf der niedrigsten Bohrschen Bahn im Wasserstoffatom ist $\eta \cong \alpha^3 \approx 10^{-6}$. Diese Terme wollen wir vernachlässigen. Damit haben wir unsere Näherung definiert und auch gesagt, was wir unter hinreichend schwachen Feldern verstehen: für sie ist $\eta \ll 1$.

2.2. *Transformation der Gleichung für die Spinbewegung vom Ruhesystem auf ein bewegtes System*

Um den Einfluß des Spins zu berücksichtigen, müssen wir die Gleichung für die Spinbewegung im homogenen Feld untersuchen. Vom klassischen Gegenstück her kennen wir die einfache Gleichung im Ruhesystem [21],

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}/\mathrm{d}t = \mu\,\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}. \tag{2.7}$$

Diese Gleichung werden wir relativistisch transformieren [22] und darauf den Hamilton-Operator aufsuchen, aus dem sie hergeleitet werden kann. Dabei verstehen wir, daß dieser nur den Teil vom vollen Hamilton-Operator darstellt, welcher die Spinbewegung beschreibt; mit dem anderen Teil, der die Schwerpunktsbewegung liefert, ist er zum gesamten Hamilton-Operator zu vervollständigen.

Den Spin im Ruhesystem betrachten wir als den räumlichen Anteil eines Polarisationsvierervektors w, dessen nullte Komponente im Ruhesystem verschwindet [23, 24, 25]. In einem beliebigen System ist w gegeben durch

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{s} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^2}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{p})\boldsymbol{p} + \frac{p^0}{m}\frac{1}{\boldsymbol{p}^2}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{p})\boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{s} + \frac{(\boldsymbol{s}\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{m(m+p^0)} \\ w^0 &= \boldsymbol{w}\boldsymbol{p}/p^0 = \boldsymbol{s}\boldsymbol{p}/m.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Im Ruhesystem verschwindet zwar w^0, aber nicht seine zeitliche Ableitung; für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ist sie

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{s}}{m} = \frac{\boldsymbol{s}}{m}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\boldsymbol{s}\boldsymbol{E}. \tag{2.9}$$

An dieser Stelle hat die Sonderrolle von q/m innerhalb des gyromagnetischen Verhältnisses ihren Ursprung, und zwar als die des „normalen" gyromagnetischen Verhältnisses eines geladenen Teilchens [27].

Indem wir die nachfolgende Gleichung im Ruhesystem nachprüfen, bestätigen wir, daß die kovariante Form der Gln. (2.7) und (2.9) lautet:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w^\mu/\mathrm{d}\tau = \mu F^{\mu\nu} w_\nu &- (1/m^2) \\ &\cdot [\mu - (q/m)]\, p^\mu F^{\nu\lambda} p_\nu w_\lambda.\end{aligned} \tag{2.10}$$

τ ist die Eigenzeit des Teilchens, $\tau = t p^0/m$. Die erhaltene Gleichung schreiben wir für die folgenden Überlegungen bequemer hin, indem wir das normale, d.h. an das Vorhandensein der Ladung gebundene gyromagnetische Verhältnis

$$\mu_n := q/m \tag{2.11}$$

von dem anomalen, d.h. ohne von außen feststellbare Ladung vorhandenen,

$$\mu_a := \mu - \mu_n = \mu - (q/m), \tag{2.12}$$

trennen [29]. Unter Auswertung der Gleichung für die Bewegung einer Ladung im elektromagnetischen Feld, d.i., der Gl. (2.4) in kovarianter Form,

$$\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = (q/m)\, F^{\mu\nu} p_\nu, \tag{2.13}$$

und der Gln. (2.8) bekommen wir aus Gl. (2.10) schließlich

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}\tau} &= \mu_n\,\boldsymbol{s} \times \left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}}{m+p^0}\right) \\ &+ \mu_a\,\boldsymbol{s} \times \left(\frac{p^0}{m}\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{p}\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}}{m(m+p^0)} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}}{m}\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

oder auch

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} &= \mu_n \frac{m}{p^0}\,\boldsymbol{s} \times \left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}}{m+p^0}\right) \\ &+ \mu_a \frac{1}{p^0}\,\boldsymbol{s} \times \left(p^0\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{p}\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}}{m+p^0} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3. *Eigenzeitformulierung der Hamiltonschen Gleichungen*

Für diese Bewegungsgleichung, als Gleichung für Operatoren im Heisenberg-Bild aufgefaßt, ist also jetzt ein Hamilton-Operator zu finden. Üblicherweise würden wir ihn ansetzen, indem wir die Gleichung

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}/\mathrm{d}t = i\,[H^t, \boldsymbol{S}] \tag{2.16}$$

und die Vertauschungsrelationen der Spinoperatoren

$$[S^i, S^k] = i\,\varepsilon^{ikl}\, S^l, \quad \text{kurz} \quad \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S} = i\,\boldsymbol{S} \tag{2.17}$$

auswerten, als

$$H_s^t = -\,\mu_n\,\frac{m}{p^0}\,\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}}{m+p^0}\right) - \mu_a\,\frac{1}{p^0}\,\boldsymbol{S}\left(p^0\,\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{p}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{p}}{m+p^0} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}\right). \tag{2.18}$$

Doch so selbstverständlich ist Gl. (2.16) im relativistischen Falle nicht[18,19]. Der Parameter, der für beliebige Bezugssysteme die Bewegung eines Teilchens markiert, ist dessen Eigenzeit. Der Hamilton-Operator in einem relativistisch „kovarianten" Hamilton-Formalismus (so die Bezeichnung bei Goldstein) wird daher das Abspulen der kanonischen Transformationen in der Eigenzeit des Teilchens erzeugen, d.h., man wird ihn so wählen, daß die Bewegungsgleichung eines Operators $\mathcal{O}$ die Form annimmt:

$$\mathrm{d}\mathcal{O}/\mathrm{d}\tau = i\,[H^\tau, \mathcal{O}] + (\partial\mathcal{O}/\partial\tau)\,. \tag{2.19}$$

Den Hamilton-Operator eines freien Teilchens setzen wir in diesem Geiste nicht an als

$$H_p^t = \sqrt{\boldsymbol{K}^2 + m^2} \tag{2.20}$$

— welche Form mit der Vorschrift (2.16) die gewohnte Beziehung zwischen kanonischem und kinetischem Impuls liefert —, sondern als

$$H_p^\tau = -\,(1/2m)\,K_\mu\,K^\mu; \tag{2.21}$$

mit dieser Form fallen bei Anwendung der Vorschrift (2.19) kanonischer und kinetischer Impuls zusammen.

Als Skalaroperator hat H_p^τ etwas mit einer skalar invarianten Energie zu tun. Bei spinlosen Teilchen ist sein Wert $-m/2$. Die Masse ist nun die einzige Größe, die mit einem Skalar von der Dimension der Energie zusammenhängt; daher sollte $-m/2$ für alle einfachen Teilchen, auch solche mit Spin, den Wert des Hamilton-Operators angeben. Der Fall von mehreren miteinander wechselwirkenden Teilchen bleibt noch zu untersuchen. Bei Teilchen in Feldern mag noch eine skalar definierte Feldenergie hinzutreten; in der von uns betrachteten „Schwachfeldnäherung" können wir diese Korrektur jedoch vernachlässigen. — Mit dem genannten Wert des Hamilton-Operators erhalten wir für freie Teilchen die Klein-Gordon-Gleichung in Operatorform.

Den Hamilton-Operator für ein spinloses Teilchen im elektromagnetischen Feld bekommen wir durch minimale Ankopplung des Feldes gemäß Gl. (1.3) zu

$$H_p^\tau = -\,(1/2m)\,(K - qA)^2\,. \tag{2.22}$$

Er liefert uns die Bewegungsgleichung (2.13)[18].

2.4. *Der Hamilton-Operator für ein relativistisches Teilchen*

Indem wir die Kenntnis unseres Schlußergebnisses vorwegnehmen, entscheiden wir uns für die Eigenzeitformulierung der Hamiltonschen Gleichungen; nur mit dieser können wir eine Gleichung herleiten, welche die Dirac-Gleichung (in der Feynmanschen Form (1.8)) als einen Spezialfall für Spin 1/2 enthält. Wir erhalten den Hamilton-Operator, der uns die Spinbewegungsgleichung (2.14) liefert, eindeutig als

$$H_s^\tau = -\,\mu_n\,\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m+P^0}\right) - \mu_a\,\boldsymbol{S}\left(\frac{P^0}{m}\,\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})}{m(m+P^0)} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m}\right). \tag{2.23}$$

Die Eindeutigkeit des gewonnenen Hamilton-Operators sehen wir so ein: Für höhere Spins als 1/2 kann man das Produkt zweier Spinmatrizen nicht allgemein auf einen Ausdruck zurückführen, in dem die Spinmatrizen nur linear vorkommen. [Die $(2s+1)$-dimensionalen Spinmatrizen für Spin s haben höchstens eine Nebendiagonale ungleich Null; bei der Multiplikation mit einer beliebigen Spinmatrix wird die Anzahl der Nebendiagonalen i.a. um eins vergrößert.] Nehmen wir nun an, daß für $s > 1/2$

$$H = H_0 + f^{ik}\,S^i\,S^k\,. \tag{2.24}$$

O.B.d.A. ist f^{ik} ein symmetrischer Dreiertensor; ein nichtsymmetrischer Anteil würde die Abspaltung eines in den Spinmatrizen linearen Ausdrucks ermöglichen. Dann folgt

$$\mathrm{d}S^l/\mathrm{d}\tau = i\,[H, S^l] = i\,[H_0, S^l] + i\,f^{ik}\,[S^i S^k, S^l] = i\,[H_0, S^l] + f^{ik}\,\varepsilon^{lim}\,(S^m S^k + S^k S^m)\,. \tag{2.25}$$

Die Vertauschung mit S^l liefert also wieder einen Ausdruck mit Produkten von Spinmatrizen, welcher nicht auf einen linearen Ausdruck zu reduzieren ist. In ähnlicher Weise zeigt man dies für skalare Polynome in den Spinmatrizen, deren Grad bei maximaler Reduzierung größer als eins ist. Daraus folgt, daß H nur die Form $H = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + R$ haben kann, um die Bewegungsgleichung (2.14) zu liefern.

Den Spinteil des Hamilton-Operators setzen wir nun mit dem Teil, der die Schwerpunktsbewegung beschreibt, zum vollständigen Hamilton-Operator zusammen:

$$H = H_p^\tau + H_s^\tau = -\frac{(K-qA)^2}{2m} - \mu_n \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m+P^0}\right) - \mu_a \boldsymbol{S}\left(\frac{P^0}{m}\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})}{m(m+P^0)} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m}\right). \quad (2.26)$$

Als erstes bemerken wir, daß H_s^τ der Größenordnung nach um η kleiner ist als H_p^τ. Zu den Impulskomponenten eines spinlosen Teilchens,

$$G^\mu = K^\mu - qA^\mu, \quad (2.27)$$

kommen also nur noch kleine Korrekturen. Ersetzen wir P^μ jeweils durch G^μ, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen (2.13) und (2.14), von denen wir ausgegangen waren, auch jetzt noch, wenn wir die Terme vernachlässigen, die gegenüber den führenden um η kleiner sind, d.h., in unserer Näherung. Mit

$$[X^\mu, K^\nu] = -i g^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

finden wir

$$P^\mu = m\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau} = i[H, X^\mu] = K^\mu - qA^\mu + \left(\frac{m}{m+G^0}\mu_n + \mu_a\right) S^i \varepsilon^{ikl} E^k \delta_l^\mu + O(\eta(K^\mu - qA^\mu)), \quad (2.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = i[H, P^\mu] + \frac{\partial P^\mu}{\partial\tau} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} P_\nu + O\left(\eta \frac{q}{m} F^{\mu\nu} P_\nu\right) \quad (2.30)$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\tau} = \mu_n \boldsymbol{S}\times\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m+P^0}\right) + \mu_a \boldsymbol{S}\times\left(\frac{P^0}{m}\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}}{m(m+P^0)} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m}\right) + O(\eta(\mu_a + \mu_n)\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}). \quad (2.31)$$

Wir vermerken

$$P_0 = G_0 + O(\eta\cdot m), \qquad P^2 = G^2 + O(\eta\cdot m^2). \quad (2.32)$$

2.5. *Die Wellengleichung im Impulsraum*

Als Basis des Hilbert-Raums, in dem der Hamilton-Operator (2.26) wirkt, wählen wir zweckmäßigerweise die Eigenvektoren zu K und zur Spinrichtung im mitbewegten System, deren Komponenten wir mit σ bezeichnen. Ein beliebiger Vektor im Hilbert-Raum läßt sich dann entwickeln gemäß

$$|\varphi\rangle = \sum_\sigma \int \mathrm{d}^4k\, |k\,\sigma\rangle\langle k\,\sigma|\varphi\rangle. \quad (2.33)$$

Aus dieser Definition lesen wir die Orthogonalitätsrelation

$$\langle k\,\sigma | k'\,\sigma'\rangle = \delta(k-k')\,\delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.34)$$

ab. Das Skalarprodukt zweier Hilbert-Raumvektoten ist

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \sum_\sigma \int \mathrm{d}^4k\, \langle\psi|k\,\sigma\rangle\langle k\,\sigma|\varphi\rangle. \quad (2.35)$$

Die Wellengleichung eines spinnenden Teilchens im homogenen elektromagnetischen Feld lautet dann

$$\left[G^2 + 2q\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{G}}{m+G^0}\right) + 2\mu_a \boldsymbol{S}\left(G^0\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{G}\boldsymbol{B})\boldsymbol{G}}{m+G^0} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{G}\right)\right]\langle k\,\sigma|\varphi\rangle = m^2\langle k\,\sigma|\varphi\rangle; \quad (2.36)$$

dabei ist

$$\boldsymbol{S}\langle k\,\sigma| := (\boldsymbol{S})_{\sigma\sigma'}\langle k\,\sigma'|, \quad (2.37)$$

$$A(X_\mu)\langle k\,\sigma|\varphi\rangle = A\left(-i\frac{\partial}{\partial K^\mu}\right)\langle k\,\sigma|\varphi\rangle. \quad (2.38)$$

Die Terme, die qA^0 im Nenner haben, können wir in eine Reihe nach $qA^0/(m+K^0)$ entwickeln. Ist die Ausdehnung des betrachteten Systems von der Größenordnung a, so ist die Variation von $qA^0/(m+K^0)$ etwa $\eta\cdot a/\lambda\!\!\!^-$. Sollte die Reihe aufgrund der Ausdehnung des Systems nicht gut konvergieren, so können wir A^0 auch wegeichen durch die Ersetzung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{A} + \partial f, \\ A^0 &\to A^0 + \partial^0 f \end{aligned} \quad (2.39)$$

mit einer Funktion

$$f(x) = -\int \mathrm{d}t'\, A^0(t', \boldsymbol{x}) + \tilde{f}(\boldsymbol{x}). \quad (2.40)$$

An den Feldstärken und daher den physikalischen Phänomenen ändert sich damit nichts.

Mit den Gln. (2.26) und (2.36) sind wir schon fast fertig: Wir haben einen Hamilton-Operator und können die zeitliche Veränderung von Operatoren bestimmen, wir besitzen die Gleichung, die uns den Lösungsraum liefert, wir haben ein Skalarprodukt definiert und können Matrixelemente berechnen. Geht man jedoch durch Fourier-Transformation in den Konfigurationsraum über, so findet man, daß die Integrationsvariablen dort einen viel zu großen Raum, die gesamte Raumzeit nämlich, überstreichen, um eine sinnvolle Definition des Skalarprodukts zu erlauben. Nach der Bemerkung (2.32) ist nun aber der Lösungsraum der Wellengleichung (2.36) angenähert gleich dem Lösungsraum der Gleichung

$$G^2 \langle k\,\sigma | \varphi \rangle = m^2 \langle k\,\sigma | \varphi \rangle . \qquad (2.41)$$

Indem wir die Integration auf diesen einengen, wird es uns möglich, ein Skalarprodukt auch im Konfigurationsraum zu definieren.

Gl. (2.41) gilt exakt, wenn das Feld verschwindet, für freie Teilchen also. Der Lösungsraum ist hier der Raum zu einer Darstellung der Symmetriegruppe des freien Teilchens, der Poincaré-Gruppe. Diesen Raum wollen wir jetzt genau kennenlernen. Dabei werden auch die Grundlagen für den Übergang zur Dirac-Gleichung abfallen.

3. Darstellungen der Poincaré-Gruppe zu positiver Masse

Wir stellen hier einige Ergebnisse aus der Theorie der Darstellungen der Poincaré-Gruppe zu nichtverschwindender Masse, $m > 0$, zusammen. Dabei stützen wir uns großenteils auf die Arbeit von Joos[6].

3.1. *Definition*

Die Poincaré-Gruppe oder inhomogene Lorentz-Gruppe, abgekürzt $\mathrm{iLg}_+^{\nearrow}$, ist die Symmetriegruppe eines freien Teilchens. Sie wird gebildet aus Transformationen der Art

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu + a_\mu , \quad \text{kurz} \quad x' = \Lambda x + a = (\Lambda, a) x , \qquad (3.1)$$

$$\text{mit} \quad \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\varrho = \delta^\nu_\varrho , \quad \det \Lambda = 1 , \quad \Lambda_0{}^0 > 0 .$$

Die Untergruppe, für die $a = 0$ ist, bezeichnet man als homogene, eigentliche, orthochrone Lorentz-Gruppe oder kurz Lorentz-Gruppe $\mathrm{Lg}_+^{\nearrow}$. Die Gruppenverknüpfung ergibt sich durch Hintereinanderausführen zweier Transformationen zu

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda \Lambda', a + \Lambda a') . \qquad (3.2)$$

Die $\mathrm{iLg}_+^{\nearrow}$ wird erzeugt von den infinitesimalen Translationen in μ-Richtung und den infinitesimalen Drehungen aus der μ- in die ν-Richtung in der $\mu\nu$-Ebene,

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= (1, \varepsilon\, \boldsymbol{P}_\mu)_\alpha{}^\lambda x_\lambda := x_\alpha - \varepsilon\, g_{\mu\alpha} , \\ x'_\alpha &= (1 + \varepsilon\, \boldsymbol{J}_{\mu\nu}, O)_\alpha{}^\lambda x_\lambda := x_\alpha - \varepsilon (g_{\mu\alpha} x_\nu - g_{\nu\alpha} x_\mu) \\ &= [\delta^\lambda_\alpha - \varepsilon (g_{\mu\alpha} \delta^\lambda_\nu - g_{\nu\alpha} \delta^\lambda_\mu)]\, x_\lambda . \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Eine unitäre Darstellung der $\mathrm{iLg}_+^{\nearrow}$ ist eine homomorphe Abbildung der $\mathrm{iLg}_+^{\nearrow}$ auf unitäre Operatoren in einem Hilbert-Raum. Sie ordnet den infinitesimalen Transformationen hermitesche Operatoren zu. Wir definieren die Darsteller

$$\begin{aligned} P_\mu &:= -\, i\, U(\boldsymbol{P}_\mu) , \\ J_{\mu\nu} &:= i\, U(\boldsymbol{J}_{\mu\nu}) . \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Aufgrund der Struktur der $\mathrm{iLg}_+^{\nearrow}$ genügen sie den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0 \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\varrho\sigma}] = -\, i (g_{\mu\varrho} J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} J_{\mu\varrho} - \\ &\qquad\qquad - g_{\mu\sigma} J_{\nu\varrho} - g_{\nu\varrho} J_{\mu\sigma}) \\ &[J_{\mu\nu}, P_\varrho] = -\, i (g_{\mu\varrho} P_\nu - g_{\nu\varrho} P_\mu) . \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Bequemlichkeitshalber definieren wir noch die Vektoroperatoren $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{N}$,

$$J_{ik} =: \varepsilon^{ikl} J^l , \qquad J_{0i} = : N^i ; \qquad (3.6)$$

ihre Kommutatoren sind

$$\begin{aligned} [J^i, J^k] &= i\, \varepsilon^{ikl} J^l , \qquad [J^i, N^k] = i\, \varepsilon^{ikl} N^l , \\ [N^i, N^k] &= -\, i\, \varepsilon^{ikl} J^l . \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Quantenmechanisch als Observable interpretiert, nehmen diese Operatoren die Bedeutung von Energie P^0, Impuls $\boldsymbol{P}$, Drehimpuls $\boldsymbol{J}$ und Energieschwerpunkt $\boldsymbol{N}$ an.

3.2. *Die irreduziblen Darstellungen zu endlicher Masse*

In einer irreduziblen Darstellung sind nach dem Lemma von Schur die Operatoren, die mit allen andern vertauschen (in der Physik bezeichnet man sie als die Invarianten), Vielfache der Eins. Man kann mit Hilfe ihrer Eigenwerte die irreduziblen Darstellungen klassifizieren.

In der iLg$_+^{\nearrow}$ sind invariant die Operatoren[33]

$$P_\mu P^\mu = m^2 \quad \text{und} \quad W_\mu W^\mu = s(s+1), \tag{3.8}$$

wobei

$$W^\mu := [-(1/2m)]\, \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} P_\nu J_{\varrho\sigma}. \tag{3.9}$$

Als Observable interpretiert, ist W der in Abschnitt (2.2) eingeführte Polarisationsvierervektor. Invariant ist ferner das Vorzeichen der Eigenwerte der nullten Komponente zeitartiger Vierervektoren, z. B. $p^0/|p^0|$. Uns interessieren physikalisch nur die Zustände mit positiver Energie; wir beschränken uns deshalb auf den Fall

$$p^0 > 0.$$

3.3. *Konstruktion der Darstellungen in einer kanonischen Basis*

Nach dem Vorbild von WIGNER[34] wollen wir jetzt explizit die irreduziblen unitären Darstellungen der iLg$_+^{\nearrow}$ zur Masse m und zum Spin s konstruieren. Als vollständigen Satz miteinander kommutierender Operatoren wählen wir die vier Komponenten von P und eine Komponente von W; dieser Satz ist translationsinvariant. Die Basis besteht dann aus den uneigentlichen Eigenvektoren der P_μ,

$$P_\mu |p\zeta\rangle = p_\mu |p\zeta\rangle. \tag{3.10}$$

ζ ist ein Entartungsparameter, der mit der Komponente von W zusammenhängt. Wir definieren die Schnellung L_p, welche den zeitartigen Vierervektor p drehungsfrei auf Ruhe transformiert:

$$L_p\, p := p_R := (m, \mathbf{0}). \tag{3.11}$$

Wegen der Darstellungsrelation

$$U^{-1}(\Lambda)\, P_\mu\, U(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu P_\nu \tag{3.12}$$

und daher

$$\begin{aligned} P_\mu U(L_p^{-1})\,|p_R\zeta\rangle &= U(L_p^{-1})(L_p^{-1})_\mu{}^\nu P_\nu |p_R\zeta\rangle \\ &= p_\mu U(L_p^{-1})\,|p_R\zeta\rangle \end{aligned} \tag{3.13}$$

läßt sich eine Basis aus Eigenvektoren mit beliebigem p durch eine im Ruhesystem ausdrücken,

$$|p\zeta\rangle = U(L_p^{-1})\,|p_R\zeta\rangle. \tag{3.14}$$

Damit ist der Entartungsparameter für beliebige p durch den für p_R festgelegt.

Die Basisvektoren $|p_R\zeta\rangle$ gehen unter Raumdrehungen ineinander über,

$$\begin{aligned} U(R)\,|p_R\zeta\rangle &= |p_R\zeta'\rangle\langle\zeta'|\,U(R)\,|\zeta\rangle \\ &=: |p_R\zeta'\rangle\, D^s_{\zeta'\zeta}(R); \end{aligned} \tag{3.15}$$

dies folgt wieder aus der Darstellungsrelation,

$$\boldsymbol{P}\, U(R)\,|p_R\zeta\rangle = U(R)\, R\boldsymbol{P}\,|p_R\zeta\rangle = \mathbf{0}. \tag{3.16}$$

Eine beliebige Transformation der Lorentz-Gruppe läßt sich nun aus Schnellungen und Raumdrehungen zusammensetzen,

$$\Lambda = L_{\Lambda p}^{-1}\, R_{\Lambda,p}\, L_p. \tag{3.17}$$

$R_{\Lambda,p}$ ist die „Wigner-Drehung"[34]

$$R_{\Lambda,p} = L_{\Lambda p}\, \Lambda L_p^{-1}; \qquad R_{\Lambda,p}\, p_R = p_R. \tag{3.18}$$

Die Basis transformiert sich also nach

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|p\zeta\rangle &= U(L_{\Lambda p}^{-1})\, U(R_{\Lambda,p})\, U(L_p)\,|p\zeta\rangle \\ &= |\Lambda p\;\zeta'\rangle\, D^s_{\zeta'\zeta}(R_{\Lambda,p}). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Für eine irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe muß demnach auch die Darstellung der Drehgruppe irreduzibel sein. Wir wählen für diese eine kanonische Basis $|\sigma\rangle$ in dem Raum, den die Eigenvektoren der Drehimpulsoperatoren zum Spin s aufspannen[35],

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^2\,|\sigma\rangle &= s(s+1)\,|\sigma\rangle, \\ S^3\,|\sigma\rangle &= \sigma\,|\sigma\rangle, \\ (S^1 \pm i\, S^2)\,|\sigma\rangle &= \sqrt{s(s+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\,|\sigma \pm 1\rangle, \\ \langle\sigma|\sigma'\rangle &= \delta_{\sigma\sigma'}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Das Skalarprodukt in der vollen Basis definieren wir in Abschnitt 3.6.

Damit haben wir eine Darstellung der iLg$_+^{\nearrow}$ zu nichtverschwindender Masse explizit konstruiert, und zwar in der kanonischen Basis. Die Bezeichnung „kanonisch" bezieht sich dabei auf das Transformationsverhalten der Spinkomponenten der Basisvektoren. Diese beschreiben Zustände des Teilchens mit bestimmtem Impuls und bestimmter Spinrichtung im mitbewegten Koordinatensystem.

Aus Anhang A.I entnehmen wir die Form der infinitesimalen Erzeugenden der Lg$_+^{\nearrow}$ in der kanonischen Basis:

$$J_{\mu\nu}\,|p\sigma\rangle = (\mathcal{X}_\mu P_\nu - \mathcal{X}_\nu P_\mu + \mathcal{S}_{\mu\nu})\,|p\sigma\rangle$$

mit

$$\mathcal{S}_{ik} = \varepsilon^{ikl} S^l$$

$$\mathcal{S}_{0k} = \frac{1}{m + P^0}(\boldsymbol{P} \times \mathbf{S})^k$$

und

$$\mathcal{X}_\mu\,|p\sigma\rangle = i\frac{\partial}{\partial p^\mu}\,|p\sigma\rangle; \tag{3.21}$$

die Differentiation geschieht unter der Nebenbedingung $p^2 = m^2$.

Die kanonische Basis hat den Nachteil, daß die Spinkomponenten sich mit einer komplizierten, vom Impuls abhängigen Matrix transformieren und Kovarianz nicht leicht erkennen lassen. Um Kovarianz explizit zu demonstrieren, sind die sog. Spinorbasen geeignet,

$$|pA\} := |p\sigma\rangle D^s_{\sigma A}(L_p)$$

und

$$|p\dot{A}\} := |p\sigma\rangle \dot{D}^s_{\sigma A}(L_p) = |p\sigma\rangle [D^{s*}(L_p^{-1})]_{\sigma A}; \quad (3.22)$$

$D(\Lambda)$ und $\dot{D}(\Lambda)$ sind dabei endliche Darstellungen der homogenen eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe.

3.4. *Endliche Darstellungen der Lorentz-Gruppe*

Eine wichtige Untergruppe der $\mathrm{iLg}_+^{\nearrow}$ ist die $\mathrm{Lg}_+^{\nearrow}$. Die infinitesimalen Erzeugenden sind hier die infinitesimalen Drehungen alleine, ohne die Translationen.

Man kann aus den Vektoren $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$, die miteinander nach Gl. (3.7) vertauschen, die komplexen Linearkombinationen

$${}^1\boldsymbol{V} := \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{N}), \quad {}^2\boldsymbol{V} := \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{N}) \quad (3.23)$$

bilden; deren Kommutatoren sind

$$[{}^1V^i, {}^1V^k] = i\,\varepsilon^{ikl}\,{}^1V^l,$$
$$[{}^2V^i, {}^2V^k] = i\,\varepsilon^{ikl}\,{}^2V^l, \quad [{}^1V^i, {}^2V^k] = 0. \quad (3.24)$$

Man sieht, daß die von ${}^1\boldsymbol{V}$, ${}^2\boldsymbol{V}$ erzeugte Darstellung im endlichen Falle isomorph ist zum direkten Produkt zweier Darstellungen der Drehgruppe. Entsprechend klassifiziert man die endlichen Darstellungen der $\mathrm{Lg}_+^{\nearrow}$ nach zwei Spinquantenzahlen s und s', die jede die Werte 0, 1/2, 1, ... annehmen.
Die endlichen Darstellungen der $\mathrm{Lg}_+^{\nearrow}$, d.h., der von $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$ erzeugten Gruppe, sind aber bis auf die triviale nicht unitär. Das sieht man, wenn man bedenkt, daß die vierdimensionale Drehgruppe isomorph zum Produkt der dreidimensionalen Drehgruppe mit sich selbst ist[36], und weiter, daß durch den komplexen Koordinatenwechsel $x^4 \to ix^0$, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}$ die vierdimensionalen orthogonalen Transformationen formal in die Lorentz-Transformationen übergehen. Ist also die Darstellung der vierdimensionalen Drehgruppe unitär, so ist es die entsprechende Darstellung der Lorentz-Gruppe nicht, wenn man von der trivialen absieht. Die endlichen Darstellungen der Lorentz-Gruppe sind nun aber gerade solche, die ein unitäres Gegenstück in den Darstellungen der vierdimensionalen Drehgruppe besitzen.

3.5. *Darstellung der Poincaré-Gruppe in den Spinorbasen*

Besonders ausgezeichnet sind für uns die Darstellungen $D^{(s0)} \equiv D^s$ und $D^{(0s)} \equiv \dot{D}^s$ der $\mathrm{Lg}_+^{\nearrow}$, und zwar als die direkten Erweiterungen der irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe zum Spin s auf Darstellungen der Lorentz-Gruppe. Man bezeichnet die Größen, die sich mit diesen Darstellungen transformieren, als Spinoren und konjugierte Spinoren, beziehungsweise. Innerhalb des Darstellungsraumes der $\mathrm{Lg}_+^{\nearrow}$ ist im Falle (so)

$$\boldsymbol{J}|A\} = \boldsymbol{S}|A\}, \quad \boldsymbol{N}|A\} = i\boldsymbol{S}|A\} \quad (3.25)$$

und im Falle (os)

$$\boldsymbol{J}|\dot{A}\} = \boldsymbol{S}|\dot{A}\}, \quad \boldsymbol{N}|\dot{A}\} = -i\boldsymbol{S}|\dot{A}\}. \quad (3.26)$$

An den infinitesimalen Transformationen weist man leicht nach, daß

$$\dot{D}^s(\Lambda) = D^{s*}(\Lambda^{-1}) \quad (3.27)$$

ist:

$$\begin{aligned}\dot{D}^s(1 + \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{N}) &= 1 - i(\boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{J}^{(0s)} + \boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{N}^{(0s)})\\ &= 1 - i\boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{S} \quad (3.28)\\ &= D^{s*}(1 - \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{N}).\end{aligned}$$

Für Raumdrehungen ist

$$D^{(s0)}(R) = D^s(R) = D^{s*}(R^{-1}) = D^{(0s)}(R) \quad (3.29)$$

wegen der Unitarität der Drehmatrizen.

Die in Gl. (3.22) definierten Spinorbasen transformieren sich unter Lorentz-Transformationen nach

$$\begin{aligned}U(\Lambda)|p\} &= U(\Lambda)|p\rangle D^s(L_p)\\ &= |\Lambda p\rangle D^s(R_{\Lambda,p})\,D^s(L_p)\\ &= |\Lambda p\rangle D^s(L_{\Lambda p}\Lambda L_p^{-1} L_p) \quad (3.30)\\ &= |\Lambda p\rangle D^s(L_{\Lambda p})\,D^s(\Lambda) = |\Lambda p\}\,D^s(\Lambda),\end{aligned}$$

d.i. ausgeschrieben

$$U(\Lambda)|pA\} = |\Lambda pA'\}\,D^s_{A'A}(\Lambda)$$

und

$$U(\Lambda)|p\dot{A}\} = |\Lambda p\dot{A}'\}\,\dot{D}^s_{A'A}(\Lambda). \quad (3.31)$$

Die Erzeugenden der infinitesimalen Drehungen haben deshalb in den Spinorbasen die Form

$$J_{\mu\nu}|pA\} = (\Xi_\mu P_\nu - \Xi_\nu P_\mu + \Sigma_{\mu\nu})|pA\}$$

bzw.

$$J_{\mu\nu} | p\dot{A}\} = (\dot{\Xi}_\mu P_\nu - \dot{\Xi}_\nu P_\mu + \dot{\Sigma}_{\mu\nu}) | p\dot{A}\}; \quad (3.32)$$

dabei ist

$$\Sigma_{ik} = \dot{\Sigma}_{ik} = \varepsilon^{ikl} S^l, \qquad \Sigma_{0i} = -\dot{\Sigma}_{0i} = i S^i \quad (3.33)$$

und

$$\Xi_\mu | pA\} = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} | pA\}, \dot{\Xi}_\mu | p\dot{A}\} = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} | p\dot{A}\}; \quad (3.34)$$

beide Differentiationen geschehen unter der Nebenbedingung $p^2 = m^2$. Wir weisen darauf hin, daß, wie in der Schreibweise angedeutet, $i\,\partial/\partial p^\mu$ in den verschiedenen Basen voneinander verschiedene Operatoren darstellt, je nachdem die Komponenten der Spinrichtung im mitbewegten System, die des Spinors oder die des konjugierten Spinors festgehalten werden. Aus Gl. (3.22) folgt beispielsweise

$$i \frac{\partial}{\partial p^\mu} | pA\} = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} | p\sigma\rangle \cdot D^s_{\sigma A}(L_p) + | p\sigma\rangle \cdot i \frac{\partial}{\partial p^\mu} D^s_{\sigma A}(L_p) \quad (3.35)$$

oder

$$\Xi_\mu = \mathscr{X}_\mu + D^s(L_p^{-1}) \cdot i \frac{\partial}{\partial p^\mu} D^s(L_p). \quad (3.36)$$

3.6. *Definition des Skalarprodukts*

Die kanonische Basis spannt den Darstellungsraum der Poincaré-Gruppe zu endlicher Masse m, Spin s und positiver Energie p^0 auf. Ein beliebiger Vektor des Hilbert-Raums eines freien Teilchens mit Masse m und Spin s läßt sich nach ihr entwickeln gemäß der Definition

$$| \varphi\rangle = \sum_\sigma \int d^4 p \, | p\sigma\rangle \langle \sigma p | \varphi\rangle \, \delta(p^2 - m^2) \, \theta(p^0). \quad (3.37)$$

Die beiden letzten Faktoren im Integranden engen die Integration auf die Werte von $\boldsymbol{p}$ ein, für die die Basis definiert ist. Dabei ist $\theta(p^0)$ die Sprungfunktion

$$\theta(p^0) = \tfrac{1}{2}(1 + p^0/|p^0|); \quad (3.38)$$

sie beschränkt den Ausdruck

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2p^0} [\delta(p^0 - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}) + \delta(p^0 + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2})] \quad (3.39)$$

auf den ersten Term der rechten Seite. Wir integrieren über p^0 und erhalten

$$| \varphi\rangle = \sum_\sigma \int \frac{d^3 \boldsymbol{p}}{2p^0} | p\sigma\rangle \langle p\sigma | \varphi\rangle, \quad (3.40)$$

wobei sich p^0 als $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ versteht. Daraus lesen wir die Orthogonalitätsrelation für die Basisvektoren ab,

$$\langle p\sigma | p'\sigma'\rangle = 2p^0 \, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \, \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (3.41)$$

und den Projektor auf den Darstellungsraum,

$$\mathscr{P}^+_{ms} = \sum_\sigma \int (d^3 \boldsymbol{p}/2p^0) | p\sigma\rangle \langle p\sigma |. \quad (3.42)$$

3.7. *Beziehungen zwischen den verschiedenen Basen. Orthogonalitätsrelationen. Projektor*

Zu den Spinorbras gelangen wir mit der Beziehung

$$\langle p\sigma | p'A\} = \langle p\sigma | p'\sigma'\rangle D^s_{\sigma' A}(L_p) = 2p^0 \, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \, D^s_{\sigma A}(L_p), \quad (3.43)$$

die aus Gl. (3.22) folgt. Dann ist

$$\{p'A | p\sigma\rangle = (\langle p\sigma | p'A\})^* = 2p^0 \, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') [D^{s*}(L_p)]_{A\sigma} = 2p^0 \, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \, \dot{D}^s_{A\sigma}(L_p^{-1}). \quad (3.44)$$

Wir lesen ab:

$$\{pA | = \dot{D}^s_{A\sigma}(L_p^{-1}) \langle p\sigma | \quad (3.45)$$

und analog

$$\{p\dot{A} | = D^s_{A\sigma}(L_p^{-1}) \langle p\sigma |. \quad (3.46)$$

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Basen stellen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
| p\sigma\rangle &= | pA\} D^s_{A\sigma}(L_p^{-1}) = | p\dot{A}\} \dot{D}^s_{A\sigma}(L_p^{-1}), \\
| p\dot{A}\} &= | p\sigma\rangle \dot{D}^s_{\sigma A}(L_p) \quad = | pB\} \Pi^s_{BA}(p/m), \\
| pA\} &= | p\sigma\rangle D^s_{\sigma A}(L_p) \quad = | p\dot{B}\} \Pi^{s\,-1}_{BA}(p/m), \\
\langle p\sigma | &= \dot{D}^s_{\sigma A}(L_p) \{pA | \quad = D^s_{A\sigma}(L_p) \{p\dot{A} |, \\
\{pA | &= \dot{D}^s_{A\sigma}(L_p^{-1}) \langle p\sigma | \quad = \Pi^{s\,-1}_{AB}(p/m) \{p\dot{B} |, \\
\{p\dot{A} | &= D^s_{A\sigma}(L_p^{-1}) \langle p\sigma | = \Pi^s_{AB}(p/m) \{pB |.
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Dabei haben wir definiert

$$\Pi^s(p/m) := D^s(L_p^{-1}) \dot{D}^s(L_p) = D^s(L_p^{-1}) D^{s*}(L_p^{-1}). \quad (3.48)$$

Die Eigenschaften der Π^s-Matrizen und ihre Berechnung sind in Anhang A.II. angegeben. Sie bilden die Grundlage eines Spinorkalküls, der höhere Spins auf gleiche Art zu behandeln gestattet wie den Spin 1/2 [37]. Für diesen Fall ist

$$\Pi^{1/2}(p) = p^0 - 2\boldsymbol{p}\boldsymbol{S}. \quad (3.49)$$

Die Orthogonalitätsrelationen zwischen den verschiedenen Basisvektoren lauten

$$
\begin{aligned}
\langle p\sigma \,|\, p'\sigma'\rangle &= 2\,p^0\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,\delta_{\sigma\sigma'}\,,\\
\dot{\{}pA \,|\, p'A'\dot{\}} &= 2\,p^0\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,\Pi^{s}_{AA'}(p/m)\,,\\
\{pA \,|\, p'A'\} &= 2\,p^0\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,\Pi^{s-1}_{AA'}(p/m)\,,\\
\dot{\{}pA \,|\, p'A'\} &= \{pA \,|\, p'A'\dot{\}} = 2\,p^0\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,\delta_{AA'}\,.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Die reinen Spinorbasen sind nicht orthogonal. Das liegt an der Nichtunitarität der endlichen Darstellungen der Lorentz-Gruppe, die es nicht erlaubt, innerhalb des irreduziblen Darstellungsraumes (der $\mathrm{Lg}_{+}^{\nearrow}$) Skalare zu bilden. Wohl aber kann man dies innerhalb eines reduziblen Raumes einer gemischten Darstellung, und zwar, wenn sie sich aus zueinander konjugierten Darstellungen zusammensetzt, z. B. aus Spinor- und konjugierter Spinordarstellung.

Der Projektor auf den Darstellungsraum der Poincaré-Gruppe nimmt in den verschiedenen Basen die Form an:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}^{+}_{ms} &= \sum_{\sigma}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,p\sigma\rangle\langle p\sigma\,|\\
&= \sum_{AA'}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,pA\}\,\Pi^{s}_{AA'}\left(\frac{p}{m}\right)\{pA'\,|\\
&= \sum_{AA'}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,pA\dot{\}}\,\Pi^{s-1}_{AA'}\left(\frac{p}{m}\right)\dot{\{}pA'\,|\\
&= \sum_{A}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,pA\dot{\}}\{pA\,|\\
&= \sum_{A}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,pA\}\dot{\{}pA\,|\,.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

3.8. *Wellenfunktionen im Impulsraum*

Ein beliebiger Vektor des Hilbert-Raumes eines freien Teilchens ist nach den verschiedenen Basen gemäß

$$|\,\varphi\rangle = \mathscr{P}^{+}_{ms}\,|\,\varphi\rangle \tag{3.52}$$

zu entwickeln. Das Verhalten der Amplituden

$$\langle p\sigma\,|\,\varphi\rangle\,,\qquad \{pA\,|\,\varphi\rangle \quad\text{und}\quad \dot{\{}pA\,|\,\varphi\rangle$$

unter Lorentz-Transformationen findet man zu

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\langle p\sigma\,|\,\varphi\rangle &:\equiv \langle p\sigma\,|\,U(\Lambda)\,\varphi\rangle\\
&= D^{s}_{\sigma\sigma'}(R_{\Lambda,\,\Lambda^{-1}p})\,\langle \Lambda^{-1}p,\,\sigma'\,|\,\varphi\rangle\,,\\
U(\Lambda)\{pA\,|\,\varphi\rangle &= \dot{D}^{s}_{AB}(\Lambda)\,\{\Lambda^{-1}p\,B\,|\,\varphi\rangle\,,\\
U(\Lambda)\dot{\{}pA\,|\,\varphi\rangle &= D^{s}_{AB}(\Lambda)\,\dot{\{}\Lambda^{-1}p\,B\,|\,\varphi\rangle\,;
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

die infinitesimalen Erzeugenden der Lorentz-Gruppe wirken deshalb gemäß

$$
\begin{aligned}
J_{\mu\nu}\langle p\sigma\,|\,\varphi\rangle &:\equiv \langle p\sigma\,|\,J_{\mu\nu}\,\varphi\rangle\\
&= (\mathscr{X}_{\mu}P_{\nu} - \mathscr{X}_{\nu}P_{\mu} + \mathscr{S}_{\mu\nu})\,\langle p\sigma\,|\,\varphi\rangle\,,\\
J_{\mu\nu}\{pA\,|\,\varphi\rangle &= (\dot{\Xi}_{\mu}P_{\nu} - \dot{\Xi}_{\nu}P_{\mu} + \dot{\Sigma}_{\mu\nu})\,\{pA\,|\,\varphi\rangle\,,\\
J_{\mu\nu}\dot{\{}pA\,|\,\varphi\rangle &= (\Xi_{\mu}P_{\nu} - \Xi_{\nu}P_{\mu} + \Sigma_{\mu\nu})\,\dot{\{}pA\,|\,\varphi\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

wobei

$$\mathscr{S}_{\mu\nu}\langle p\sigma\,| := (\mathscr{S}_{\mu\nu})_{\sigma\sigma'}\langle p\sigma'\,| \quad \text{usw.}, \tag{3.55}$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathscr{X}_{\mu}\langle p\sigma\,| &= -\,i\,\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\langle p\sigma\,|\,,\quad \dot{\Xi}_{\mu}\{pA\,| = -\,i\,\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\{pA\,|\,,\\
\Xi_{\mu}\dot{\{}pA\,| &= -\,i\,\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\,\dot{\{}pA\,|\,;
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

die Differentiationen geschehen unter der Nebenbedingung $p^2 = m^2$. Das Verhalten unter Translationen ist trivial. Damit ist eine Darstellung der Poincaré-Gruppe im Raum der kanonischen Wellenfunktionen $\langle p\sigma\,|\,\varphi\rangle$ bzw. der Spinorwellenfunktionen $\{pA\,|\,\varphi\rangle$, $\dot{\{}pA\,|\,\varphi\rangle$ (die Attribute beziehen sich auf das Transformationsverhalten der Spinkomponenten) auf dem Impulshypeıboloid gegeben. Sie ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle\varphi\,|\,\psi\rangle = \langle\varphi\,|\,\mathscr{P}^{+}_{ms}\,|\,\psi\rangle \tag{3.57}$$

unitär und zur ursprünglichen Darstellung äquivalent.

Das Matrixelement eines beliebigen Operators innerhalb des Hilbert-Raumes ist

$$\langle\varphi\,|\,\mathscr{O}\,|\,\psi\rangle = \langle\varphi\,|\,\mathscr{P}^{+}_{ms}\,\mathscr{O}\,\mathscr{P}^{+}_{ms}\,|\,\psi\rangle\,, \tag{3.58}$$

woraus mit Gl. (3.51) die je nach den verwandten Amplituden brauchbaren Relationen abzulesen sind.

3.9. *Wellenfunktionen im Konfigurationsraum*

Bisher haben wir alle Überlegungen in der Basis der (uneigentlichen) Eigenvektoren zum Impulsoperator angestellt. Durch Fourier-Transformation gehen wir jetzt auf eine Basis im Konfigurationsraum über.

Wir definieren die ket-Basen wie üblich

$$
\begin{aligned}
|\,x\sigma\rangle &:= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,p\sigma\rangle\exp(i\,p\,x)\,,\\
|\,xA\} &:= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,pA\}\exp(i\,p\,x)\,,\\
|\,xA\dot{\}} &:= \frac{1}{(2\pi)^{2/3}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\,|\,pA\dot{\}}\exp(i\,p\,x)\,.
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Daraus ergeben sich die bra-Basen zu

$$\langle x\sigma\,| = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\,p^0}\exp(-\,i\,p\,x)\langle p\sigma\,| \quad \text{usw.}; \tag{3.60}$$

die Orthogonalitätsrelationen sind

$$\begin{aligned}\langle x A \,|\, x' A'\rangle &= \{x A \,|\, x' A' \dot{\}} = \dot{\{} x A \,|\, x' A'\} \\ &= \frac{\delta_{AA'}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}}{2 p^0} \exp\{-i p (x - x')\} \\ &=: i\, \delta_{AA'}\, \Delta^+(x - x')\end{aligned} \tag{3.61}$$

Für die Eigenschaften der Funktion $\Delta^+(x)$ verweisen wir auf das Buch von SCHWEBER[38], § 7c. Sie tritt an die Stelle der Diracschen Deltafunktion, die wir ohne die Einengung der Basis auf die Masse m und positive Frequenzen erwarten.

Die Basen im Konfigurationsraum transformieren sich gemäß

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|x\sigma\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p^0} \\ &\quad \times |\,\Lambda p, \sigma'\rangle\, D^s_{\sigma'\sigma}(R_{\Lambda,p}) \exp(i p x), \\ U(\Lambda)\langle x\sigma| &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p^0} \\ &\quad \times \exp(-i p x)\, D^s_{\sigma\sigma'}(R_{\Lambda,\Lambda^{-1}p})\, \langle \Lambda^{-1}p, \sigma'|, \\ U(\Lambda)\,|xA\} &= |\,\Lambda x, A'\}\, D^s_{A'A}(\Lambda), \\ U(\Lambda)\,\{xA| &= \dot{D}^s_{AA'}(\Lambda)\,\{\Lambda^{-1}x, A'|, \\ U(\Lambda)\,|xA\dot{\}} &= |\,\Lambda x, A'\dot{\}}\, \dot{D}^s_{A'A}(\Lambda), \\ U(\Lambda)\,\dot{\{}xA| &= D^s_{AA'}(\Lambda)\,\dot{\{}\Lambda^{-1}x, A'|\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Die kanonische Basis verhält sich unter Transformationen nicht einfach. Das ist ein Grund dafür, warum Spinorbasen im Konfigurationsraum bevorzugt werden: ihnen sieht man Kovarianz sofort an.

Der Impulsoperator wirkt auf die Basis im Konfigurationsraum nach

$$\begin{aligned} P_\mu\,|x\sigma\rangle &= -\,i\,\partial_\mu\,|x\sigma\rangle, \\ P_\mu\,|xA\} &= -\,i\,\partial_\mu\,|xA\}, \\ P_\mu\,|xA\dot{\}} &= -\,i\,\partial_\mu\,|xA\dot{\}}, \\ P_\mu\langle x\sigma| &= i\,\partial_\mu\langle x\sigma|, \\ P_\mu\{xA| &= i\,\partial_\mu\{xA|, \\ P_\mu\dot{\{}xA| &= i\,\partial_\mu\dot{\{}xA|\,. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Die Basen sind untereinander verknüpft entsprechend den Gln. (3.47), nur ist in den Transformationsmatrizen p durch einen der Ausdrücke (3.63) zu ersetzen, z. B.

$$\begin{aligned} \dot{\{}xA| &= \Pi^s_{AB}(i\,\partial/m)\,\{xB|, \\ |xA\dot{\}} &= \Pi^s_{BA}(-\,i\,\partial/m)\,|xB\}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Der Projektor auf den Raum der Darstellung der Poincaré-Gruppe zur Masse m, zum Spin s und zu positiver Energie ist

$$\begin{aligned} \mathscr{P}^+_{ms} &= \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,(P_0\,|x\sigma\rangle \cdot \langle x\sigma| + |x\sigma\rangle \cdot \langle x\sigma|\,P_0) \\ &= \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,(-\,i\,\partial_0\,|x\sigma\rangle \cdot \langle x\sigma| + |x\sigma\rangle \\ &\qquad \times i\,\partial_0\langle x\sigma|) \\ &=: \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,|x\sigma\rangle \cdot i\,\overleftrightarrow{\partial_0}\langle x\sigma| \\ &= \sum_A \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,|xA\}\, i\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\dot{\{}xA| \\ &= \sum_A \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,|xA\dot{\}}\, i\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\{xA| \\ &= \sum_{AA'} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,|xA\}\, i\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\Pi^s_{AA'}(i\,\partial/m)\,\{xA'|\,. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Diese Gleichung weisen wir als richtig nach, indem wir sie auf die Form (3.51) zurückführen:

$$\begin{aligned} &\sum_\sigma \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,(P_0\,|x\sigma\rangle \cdot \langle x\sigma| + |x\sigma\rangle \cdot \langle x\sigma|\,P_0 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p^0}\, \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{2p'^0}\, (P_0\,|p\sigma\rangle \exp(i(p-p')x)\langle p'\sigma| + |p\sigma\rangle \exp(i(p-p')x)\langle p'\sigma|\,P_0) \\ &= \sum_\sigma \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p^0}\, \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{2p'^0}\, (p_0\,|p\sigma\rangle\, \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\langle p'\sigma| + |p\sigma\rangle\, \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\langle p'\sigma|\,p_0) = \sum_\sigma \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p^0}\,|p\sigma\rangle\langle\sigma p| = \mathscr{P}^+_{ms}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Die Wellenfunktionen im Konfigurationsraum definieren wir als die Amplituden $\langle x\sigma|\varphi\rangle$, $\{xA|\varphi\rangle$ bzw. $\dot{\{}xA|\varphi\rangle$. Skalarprodukte und Matrixelemente bildet man gemäß Gl. (3.57) und Gl. (3.58) mit Hilfe des Projektors (3.65).

4. Die Wellengleichung für relativistische Teilchen mit Spin

Als Wellengleichung für ein relativistisches Teilchen mit Spin hatten wir gefunden:

$$\begin{aligned} &\Big[G^2 + 2q\,\boldsymbol{S}\Big(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{G}}{m+G^0}\Big) \\ &\qquad + 2\mu_a\,\boldsymbol{S}\Big(G^0\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{G}\boldsymbol{B})\boldsymbol{G}}{m+G^0} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{G}\Big)\Big] \\ &\qquad \times \langle k\sigma|\varphi\rangle = m^2\,\langle k\sigma|\varphi\rangle \end{aligned} \tag{2.36}$$

mit $G = K - qA$.

Aus einer Abschätzung der Größenordnung der auftretenden Terme wissen wir, daß die Lösungen dieser Gleichung nahe bei den Lösungen der Gleichung

$$G^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle \tag{2.41}$$

liegen; die Wechselwirkung des Spins mit dem Feld verursacht nur eine um die Größenordnung η kleinere Störung. Mit der nötigen Vorsicht können wir daher, indem wir G durch P ersetzen, den im vorigen Abschnitt entwickelten Apparat der Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe anwenden.

4.1. *Die Form der Wellengleichung in den Spinorbasen*

In Gl. (2.36) wird das Teilchen beschrieben durch den Impuls und durch die Spinrichtung im mitbewegten System. Die Wellenfunktionen sind, dem Transformationsverhalten der Spinkomponenten nach, kanonisch. Es liegt nahe, mit Hilfe der Beziehungen (3.47) zwischen der kanonischen Basis und den Spinorbasen zu Gleichungen für Spinorwellenfunktionen überzugehen. Die Spinorkomponenten transformieren sich unter Lorentz-Transformationen einfach, die des Spins im mitbewegten System dagegen mit einer vom kinetischen Impuls abhängigen Matrix. Wir erwarten deshalb, daß die Terme der Spin-Feld-Wechselwirkung dort eine einfachere Form annehmen als in der kanonischen Basis.

Zuerst behandeln wir den Fall neutraler Teilchen, die ja nur das anomale Moment besitzen, dann den Fall geladener Teilchen mit normalem Moment alleine. Der allgemeine Fall geladener Teilchen mit sowohl normalem als auch anomalem Moment läßt sich daraus leicht zusammensetzen.

a) Neutrales Teilchen mit anomalem Moment

Die Wellengleichung (2.36) vereinfacht sich zu

$$\left[K^2 + 2\,\mu_a\,\boldsymbol{S}\left(K^0\,\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{K}\boldsymbol{B})\boldsymbol{K}}{m+K^0} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{K}\right)\right]\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle\,. \tag{4.1}$$

Wir erinnern uns nun, daß es eine Näherung war, in den Spintermen K anstatt P zu setzen. Für den Augenblick machen wir sie wieder rückgängig und finden, daß man den Spinterm mit den Erzeugenden der Poincaré-Gruppe ausdrücken kann als

$$2\,\mu_a\,\boldsymbol{S}\left(P^0\,\boldsymbol{B} - \frac{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}}{m+P^0} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}\right)\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,P_\mu\,W_\nu\,F_{\varrho\sigma}\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle; \tag{4.2}$$

dabei ist W der in Gl. (3.9) definierte Operator des Polarisationsvierervektors,

$$W^\mu = -\frac{1}{2m}\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,P_\nu\,J_{\varrho\sigma}\,. \tag{3.9}$$

Die Gleichung

$$(K^2 + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,P_\mu\,W_\nu\,F_{\varrho\sigma})\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle \tag{4.3}$$

können wir unverändert von der kanonischen Basis in die Spinorbasen übernehmen: K vertauscht mit $P = P(K)$ [vgl. Gl. (2.29)], also

$$D^s(L_p^{-1})\,K^2\,D^s(L_p) = K^2 = \dot{D}^s(L_p^{-1})\,K^2\,\dot{D}^s(L_p)\,, \tag{4.4}$$

und der Spinterm ist basisinvariant, nämlich mit den Erzeugenden der Poincaré-Gruppe, geschrieben. Somit gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}(K^2 + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,P_\mu\,W_\nu\,F_{\varrho\sigma})\,\{k A\,|\,\varphi\rangle &= m^2\{k A\,|\,\varphi\rangle\,,\\ (K^2 + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,P_\mu\,W_\nu\,F_{\varrho\sigma})\,\dot{\{}k A\,|\,\varphi\rangle &= m^2\dot{\{}k A\,|\,\varphi\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Natürlich nimmt $J_{\mu\nu}$ in den Spinorbasen eine andere Form an als in der kanonischen; ausgeschrieben lauten die Gln. (4.5) daher

$$\begin{aligned}&[K^2 + 2(\mu_a/m)\,\boldsymbol{S}(-i\,\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}^2 - \boldsymbol{B}K^{02} + i(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{K})K^0 + (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{K})K^0 + i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}))]\\ &\qquad\times\{k A\,|\,\varphi\rangle = m^2\{k A\,|\,\varphi\rangle\,,\\ &[K^2 + 2(\mu_a/m)\,\boldsymbol{S}(i\,\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}^2 - \boldsymbol{B}K^{02} - i(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{K})K^0 + (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{K})K^0 - i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}))]\\ &\qquad\times\dot{\{}k A\,|\,\varphi\rangle = m^2\dot{\{}k A\,|\,\varphi\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dabei haben wir im Rahmen unserer Näherung wieder P durch K ersetzt.

b) Geladenes Teilchen mit normalem Moment

Die Wellengleichung in der kanonischen Basis lautet

$$\left[G^2 + 2q\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{G}}{m+G^0}\right)\right]\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle\,. \tag{4.7}$$

Auch hier machen wir für den Augenblick die Näherung, in den Spintermen P durch G zu ersetzen, rückgängig:

$$\mathscr{M}\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle := \left[G^2 + 2q\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m+P^0}\right)\right]\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle\,. \tag{4.8}$$

Wir suchen die entsprechenden Gleichungen in den Spinorbasen,

$$\dot{M}\{kA\,|\,\varphi\rangle = m^2\{kA\,|\,\varphi\rangle \quad \text{und} \quad M\{kA\,|\,\varphi\rangle = m^2\dot{\{}kA\,|\,\varphi\rangle\,. \tag{4.9}$$

Anders als im neutralen Fall lassen sich jetzt die Spinterme nicht mit den Erzeugenden der Poincaré-Gruppe ausdrücken. Das liegt daran, daß die Komponenten von G gemäß

$$[G^\mu, G^\nu] = -\,i\,q\,F^{\mu\nu}\,;\ [G^2, G^\nu] = -\,2\,i\,q\,G_\lambda F^{\lambda\nu} \tag{4.10}$$

vertauschen; der Kommutator ist um η kleiner als die Produkte, deren Differenz zu bilden ist. Weil nun (vgl. Anhang A.II)

$$D^s(L_P^{-1}) = D^s(L_G^{-1}) + \Delta^s_-\,, \qquad \Delta^s_- = O(\eta)\,, \tag{4.11}$$

ist der Kommutator von G^2 mit $D^s(L_P^{-1})$ von der Ordnung $\eta\cdot m^2$, d.h. von derselben Ordnung wie die Spinterme; zu ihnen tritt er beim Übergang in die Spinorbasen hinzu,

$$D^s(L_P^{-1})\,G^2\,D^s(L_P) = G^2 + O(\eta\,m^2)\,. \tag{4.12}$$

Also kann man nicht die Spinterme mit den Erzeugenden der Poincaré-Gruppe schreiben, denn eine solche Form ließe sich ungeändert von einer Basis in eine andere übertragen.

Der Wechsel auf eine andere Basis ist wegen der Kompliziertheit der Spinalgebren i.a. sehr mühsam. Eine bestechend einfache Ausnahme macht der Übergang im Ruhesystem des Teilchens; dort wird die Übergangsmatrix gleich der Einheitsmatrix. Bringen wir nun die neue Gleichung auf kovariante, d.i., gegenüber Lorentz-Transformationen invariante Form, so kennen wir sie bereits in jedem Bezugssystem; der Basiswechsel ist für beliebige Bezugssysteme geleistet, wenn er für ein besonderes, hier das Ruhesystem des Teilchens, durchgeführt wurde.

Im Ruhesystem ist

$$\boldsymbol{P}\,|\,\varphi\rangle = \boldsymbol{0}\,, \qquad P^0\,|\,\varphi\rangle = m\,|\,\varphi\rangle \tag{4.13}$$

für den Zustandsvektor des betrachteten Teilchens, also insbesondere [vgl. Gl. (2.29)] in der kanonischen Basis

$$\boldsymbol{P}\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = [\boldsymbol{G} + \boldsymbol{O}(\eta\,m)]\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = \boldsymbol{0}\,, \tag{4.14}$$
$$P^0\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = [G^0 + O(\eta\,m)]\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle$$

für die Lösungen der Gl. (4.8).

Ins Ruhesystem können wir erst gehen, nachdem wir die Kommutatoren gebildet haben. Aus Anhang A.II entnehmen wir die Form von $D^s(L_P^{-1})$ für kleine Geschwindigkeiten,

$$D^s(L_P^{-1}) = 1 - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}}{m} + P^i P^k\, T^{ik} + O\left(\frac{P^0-m}{m}\right). \tag{4.15}$$

Der Kommutator von $P^i P^k$ mit einer Funktion von G ist ein Paar von Produkten mit P^i bzw. P^k, welches beim Übergang in das Ruhesystem verschwindet. Zu berücksichtigen bleibt also nur

$$D^s(L_P^{-1}) = 1 - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}}{m} + \cdots. \tag{4.16}$$

Nach den Gln. (3.47), (4.7) und (4.9) ist nun

$$D^s(L_P^{-1})\,\mathscr{M}\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = D^s(L_P^{-1})\,m^2\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\dot{\{}kA\,|\,\varphi\rangle = M\{kA\,|\,\varphi\rangle = M\,D^s(L_P^{-1})\langle k\,\sigma\,|\,\varphi\rangle\,. \tag{4.17}$$

Wir müssen daher die Operatorgleichung

$$D^s(L_P^{-1})\,\mathscr{M} = M\,D^s(L_P^{-1}) \tag{4.18}$$

auswerten. Aus Gl. (4.12) ersehen wir, daß

$$M =: G^2 + \Gamma \tag{4.19}$$

ist mit einem Ausdruck Γ von der Größenordnung η; Gl. (4.18) lautet dann

$$\left(1 - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}}{m} + \cdots\right)\left(G^2 + 2q\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m+P^0}\right)\right) = (G^2 + \Gamma)\left(1 - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}}{m} + \cdots\right) \tag{4.20}$$

oder

$$\left[G^2, \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}}{m}\right] + 2q\boldsymbol{S}\boldsymbol{B} = \Gamma, \tag{4.21}$$

wobei wir Terme unterdrückten, welche in der Grenze $\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{O}$ verschwinden oder welche von der Ordnung $\eta^2 m^2$ klein sind. Der Kommutator ist

$$\begin{aligned}\left[G^2, \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}}{m}\right] &= \frac{1}{m}\boldsymbol{S}[G^2, \boldsymbol{G} + \boldsymbol{O}(\eta\, m)] = -\frac{2iq}{m} S^i G_\lambda F^{\lambda i} + O(\eta^2 m^2)\\ &= -\frac{2iq}{m} S^i G^0 F^{0i} + \frac{2iq}{m} S^i G^k F^{ki} + O(\eta^2 m^2)\\ &= -\frac{2iq}{m} S^i P^0 F^{0i} + \frac{2iq}{m} S^i P^k F^{ki} + O(\eta^2 m^2).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Beim Übergang ins Ruhesystem erhalten wir in der Ordnung ηm^2:

$$\Gamma = 2q\boldsymbol{S}\boldsymbol{B} + 2iq\boldsymbol{S}\boldsymbol{E}. \tag{4.23}$$

Dieser Ausdruck wirkt auf die Spinorwellenfunktion wie die kovariante Form

$$\Gamma\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle = 2q\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{E})\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle = -q\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle \tag{4.24}$$

[vgl. Gl. (3.54) mit $\Sigma_{\mu\nu}$ aus Gl. (3.33)]. Damit erhalten wir als Wellengleichung für ein geladenes Teilchen mit normalem magnetischem Moment in der Spinorbasis

$$(G^2 - q\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle = (G^2 + 2q\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{E}))\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle = m^2\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle. \tag{4.25}$$

Analog finden wir die Wellengleichung in der dazu konjugierten Spinorbasis

$$(G^2 - q\dot{\Sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\{kA\,|\,\varphi\rangle = (G^2 + 2q\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B} - i\boldsymbol{E}))\{kA\,|\,\varphi\rangle = m^2\{kA\,|\,\varphi\rangle. \tag{4.26}$$

In dem Gleichungspaar (4.25), (4.26) erkennen wir für den Fall des Spins 1/2 die Dirac-Gleichung in der Feynmanschen Form (1.8) wieder; den Übergang vom Impulsraum in den Konfigurationsraum leistet eine Fourier-Transformation. Damit haben wir die Brücke zur gewohnten Beschreibung des Elektrons im Falle homogener Felder geschlagen.

Wir erwähnen, daß sich auch Gl. (4.8) in einer analogen Form zu den Gln. (4.25), (4.26) schreiben läßt:

$$(G^2 - q\mathscr{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\langle k\sigma\,|\,\varphi\rangle = \left(G^2 + 2q\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{P}}{m+P^0}\right)\right)\langle k\sigma\,|\,\varphi\rangle = m^2\langle k\sigma\,|\,\varphi\rangle. \tag{4.27}$$

Diese formale Verwandtschaft der Gleichungen in den verschiedenen Basen ist sehr naheliegend und suggestiv, muß aber im einzelnen nachgewiesen werden.

Die oben benutzte Methode, von einer Basis in eine andere im Ruhesystem überzugehen und die Wellengleichung daraufhin kovariant zu formulieren, ist auch im Falle neutraler Teilchen anwendbar. Dort liefert sie die Gleichungen

$$\begin{aligned}&(K^2 + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu\mathscr{U}_\nu F_{\varrho\sigma})\langle k\sigma\,|\,\varphi\rangle\\ &\quad = m^2\langle k\sigma\,|\,\varphi\rangle,\\ &(K^2 + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu Y_\nu F_{\varrho\sigma})\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle\\ &\quad = m^2\{\dot{k}A\,|\,\varphi\rangle,\\ &(K^2 + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu \dot{Y}_\nu F_{\varrho\sigma})\{kA\,|\,\varphi\rangle\\ &\quad = m^2\{kA\,|\,\varphi\rangle\end{aligned} \tag{4.28}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^\mu &= -\frac{1}{2m}\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\nu\mathscr{S}_{\varrho\sigma},\\ Y^\mu &= -\frac{1}{2m}\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\nu\Sigma_{\varrho\sigma},\\ \dot{Y}^\mu &= -\frac{1}{2m}\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\nu\dot{\Sigma}_{\varrho\sigma}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Diese Gleichungen sind zu den Gln. (4.3), (4.5) äquivalent.

c) Geladenes Teilchen mit beliebigem Moment

Dieser Fall läßt sich aus den beiden vorangehenden zusammensetzen: Beim Übergang im Ruhesystem von einer Basis zur andern wird der Kommutator der Übergangsmatrix mit G^2 bereits von den Termen, die das normale magnetische Moment beschreiben, absorbiert; es bleibt also nur die Summe der unter a), b) erhaltenen Spinterme zu bilden. Wir sehen dies auch auf andere Weise: Die Operatoren in Gl. (2.36) zerfallen in einen Teil

$$G^2 - q\,\mathscr{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.30}$$

der sich beim Übergang in

$$G^2 - q\,\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad G^2 - q\,\dot{\Sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.31}$$

transformiert, und einen basisunabhängig geschriebenen Teil

$$\mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu W_\nu F_{\varrho\sigma}. \tag{4.32}$$

So lautet die Wellengleichung in den verschiedenen Basen

$$\begin{aligned}(G^2 - q\,\mathscr{S}_{\mu}F^{\mu\nu} + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu \mathscr{U}_\nu F_{\varrho\sigma} - m^2)&\\ \times\langle k\,\sigma|\varphi\rangle = 0,&\\ (G^2 - q\,\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu Y_\nu F_{\varrho\sigma} - m^2)&\\ \times\{k A|\varphi\rangle = 0,&\\ (G^2 - q\,\dot{\Sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mu_a\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}P_\mu \dot{Y}_\nu F_{\varrho\sigma} - m^2)&\\ \times\{k A|\varphi\rangle = 0.&\end{aligned} \tag{4.33}$$

Bei Rechnungen kann in den Gleichungen G anstatt P gesetzt werden. Die Spinorgleichungen sind wie erwartet einfacher zu behandeln als die Gleichung in der kanonischen Basis: es tauchen keine Operatoren mehr im Nenner auf. Eine besonders einfache Form nimmt der Term für das normale magnetische Moment an.

Die Übergangsmatrizen ändern sich bloß um von der Ordnung η kleine Größen, wenn wir P durch G ersetzen (s. Anhang A.II). In dieser Näherung gelten also die Beziehungen (3.47) für Lösungen der Wellengleichung. Trotz der Differenz zu den Matrizen in P können wir auch mit den Matrizen in G den Übergang auf eine andere Form der Wellengleichung vollziehen: Nach Gl. (4.18) z.B. ist

$$\begin{aligned}(D^s(L_G^{-1}) + \Delta^s_-)&(G^2 - q\,\mathscr{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\\ &= (G^2 - q\,\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})(D^s(L_G^{-1}) + \Delta^s_-)\end{aligned} \tag{4.34}$$

oder bis auf Terme höherer Ordnung als ηm^2:

$$\begin{aligned}[D^s(L_G^{-1}), G^2] - D^s(L_G^{-1})\,q\,\mathscr{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}&\\ + q\,\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}D^s(L_G^{-1}) = 0.&\end{aligned} \tag{4.35}$$

Die Differenz Δ^s_- fällt aus dieser Gleichung heraus. Mit der nötigen Absicherung läßt sich diese Gleichung auch auf den Übergang im Ruhesystem anwenden; in der Tat sind wir im wesentlichen auch so vorgegangen.

Zum Schluß dieses Paragraphen bemerken wir noch, daß nicht nur, wie wir schon bei der Betrachtung der Darstellungen der Poincaré-Gruppe sahen, $-i\,\partial/\partial K$ von Basis zu Basis verschiedene Operatoren darstellt, je nachdem die Komponenten der Spinrichtung im mitbewegten System oder die Komponenten eines der Spinoren festgehalten werden, sondern daß auch K in jeder Basis auf andere Weise wirkt, weil es nicht mit den Übergangsmatrizen vertauscht. Diese Unterschiede werden in Gl. (4.35) automatisch berücksichtigt, wenn der Kommutator von G^2 mit der Übergangsmatrix berechnet wird. Um der Übersichtlichkeit der Gleichungen willen und weil Mißverständnisse nicht aufkommen können, haben wir die Bezeichnungen nicht streng auseinandergehalten.

4.2. *Die Wellengleichung im Konfigurationsraum*

In den Konfigurationsraum gehen wir durch Fourier-Transformation,

$$\begin{aligned}\langle x\,\sigma| &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4k\,\exp(-i\,k\,x)\langle k\,\sigma|,\\ \dot{\{}x A| &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4k\,\exp(-i\,k\,x)\,\dot{\{}k A|,\\ \{x A| &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4k\,\exp(-i\,k\,x)\,\{k A|.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Die Operatoren K, $-i\,\partial/\partial K$ nehmen hier die Form an:

$$\begin{aligned}K_\mu\langle x\,\sigma| &= i\,\partial_\mu\langle x\,\sigma|,\\ K_\mu\dot{\{}x A| &= i\,\partial_\mu\dot{\{}x A|,\\ K_\mu\{x A| &= i\,\partial_\mu\{x A|,\\ -i\frac{\partial}{\partial K^\mu}\langle x\,\sigma| &= X_\mu\langle x\,\sigma| = x_\mu\langle x\,\sigma|,\\ -i\frac{\partial}{\partial K^\mu}\dot{\{}x A| &= X_\mu\dot{\{}x A| = x_\mu\dot{\{}x A|,\\ -i\frac{\partial}{\partial K^\mu}\{x A| &= X_\mu\{x A| = x_\mu\{x A|.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Auch hier machen wir darauf aufmerksam, daß X und $i\,\partial$ von Basis zu Basis verschiedene Operatoren darstellen. Die Beziehungen (3.47) zwischen den verschiedenen Basen bleiben bestehen, wenn man in den Übergangsmatrizen P durch G ersetzt und K wie angegeben interpretiert. Die Wellengleichung (4.33) schreibt sich im Konfigurationsraum in trivialer Weise entsprechend.

4.3. *Definition des Skalarprodukts*

In Abschnitt 2.5 hatten wir als Skalarprodukt für die kanonischen Wellenfunktionen im Impulsraum den Ausdruck

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \sum_\sigma\int d^4k\langle\psi|k\,\sigma\rangle\langle k\,\sigma|\varphi\rangle \tag{2.35}$$

definiert. Durch Übergang auf die Spinorbasen gemäß Gl. (3.47) erhalten wir entsprechend das Skalarprodukt für die Spinorwellenfunktionen im Impulsraum

$$\begin{aligned}\langle\psi|\varphi\rangle &= \sum_{AA'}\int d^4k\langle\psi|kA\}\Pi^s_{AA'}(G/m)\{kA'|\varphi\rangle\\ &= \sum_A\int d^4k\langle\psi|kA\}\{\dot{k}A|\varphi\rangle \qquad (4.38)\\ &= \sum_A\int d^4k\langle\psi|k\dot{A}\}\{kA|\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt im Konfigurationsraum ist uns die Theorie des freien Teilchens von Nutzen. Dort wirkt, wie wir in Abschnitt 3.9 sahen, das Einengen auf den Raum der Lösungen positiver Energie der Gleichung

$$P^2|\varphi\rangle = m^2|\varphi\rangle \qquad (4.39)$$

im Konfigurationsraum als Beschränkung auf die Integration bei einem festen Wert der Zeitvariablen (oder äquivalent als Beschränkung der Integration auf eine raumartige Hyperfläche in der Raumzeit[38], vgl. § 3b). Wir beachten nun, daß für die Lösungen der Wellengleichung

$$\begin{aligned}P^2|\varphi\rangle &= (G^2 + O(\eta\, m^2))|\varphi\rangle,\\ P_0|\varphi\rangle &= (G_0 + O(\eta\, m))|\varphi\rangle \qquad (2.32)\end{aligned}$$

ist, d.h., daß die Lösungsräume der Gleichungen

$$P^2|\varphi\rangle = m^2|\varphi\rangle \qquad (4.39)$$

und

$$G^2|\varphi\rangle = m^2|\varphi\rangle \qquad (2.41)$$

nahe beieinander liegen. Der analog zu Gl. (3.65) mit G_0 anstatt P_0 gebildete Operator

$$\sum_\sigma\int d^3\boldsymbol{x}[(-i\,\partial_0 - qA_0)|x\sigma\rangle\cdot\langle x\sigma| + |x\sigma\rangle\cdot(i\,\partial_0 - qA_0)\langle x\sigma|] \qquad (4.40)$$

sollte also bis auf einen Fehler von der Ordnung η der Projektor auf den Lösungsraum der Wellengleichung sein. Den Definitionsbereich beschränken wir auf Lösungen zu positiver Energie. Doch hat auch dann noch dieser „Projektor" einen Schönheitsfehler: er ist nicht positiv definit. Das liegt aber an weiter nichts als einer unzweckmäßig gewählten Beschreibung des Feldes; wir sehen nämlich, daß man durch eine — physikalisch folgenlose — Umeichung des Potentials gemäß Gln. (2.39), (2.40) das Skalarpotential zum Verschwinden bringen kann; der Projektor ist dann auf dem Raum der Lösungen zu positiven Frequenzen positiv, wie er sein soll. Nach dieser heuristischen Betrachtung definieren wir daher das Skalarprodukt in der Beschreibung, in der das Skalarpotential verschwindet, mit Lösungen zu positiven Frequenzen $|\tilde{\varphi}\rangle$ als

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\psi}|\tilde{\varphi}\rangle &= \sum_\sigma\int d^3\boldsymbol{x}\langle\tilde{\psi}|x\sigma\rangle\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\langle x\sigma|\tilde{\varphi}\rangle\\ &= \sum_A\int d^3\boldsymbol{x}\langle\tilde{\psi}|xA\}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\{\dot{x}A|\tilde{\varphi}\rangle\\ &= \sum_A\int d^3\boldsymbol{x}\langle\tilde{\psi}|x\dot{A}\}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\{xA|\tilde{\varphi}\rangle \qquad (4.41)\\ &= \sum_{AA'}\int d^3\boldsymbol{x}\langle\tilde{\psi}|xA\}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\Pi^s_{AA'}\left(\frac{i\partial - qA}{m}\right)\{xA|\tilde{\varphi}\rangle.\end{aligned}$$

4.4. *Verhalten der Wellengleichung unter Raum- und Zeitspiegelung*

In einer unitären Darstellung wird die Raumspiegelung $\mathscr{P}$ durch einen unitären, die Zeitumkehr $\mathscr{T}$ bekanntlich[39] durch einen antiunitären Operator bewirkt. Dabei transformieren sich die in der Wellengleichung auftretenden Größen nach

$$\begin{array}{llll}\mathscr{P}: & \boldsymbol{P}\to-\boldsymbol{P} & \mathscr{T}: & \boldsymbol{P}\to-\boldsymbol{P}\\ & P^0\to P^0 & & P^0\to P^0\\ & J_{ik}\to J_{ik} & & J_{ik}\to -J_{ik}\\ & J_{0i}\to -J_{0i} & & J_{0i}\to J_{0i}\\ & \boldsymbol{A}\to-\boldsymbol{A} & & \boldsymbol{A}\to-\boldsymbol{A}\\ & A^0\to A^0 & & A^0\to A^0\\ & F_{ik}\to F_{ik} & & F_{ik}\to -F_{ik}\\ & F_{0i}\to -F_{0i} & & F_{0i}\to F_{0i}.\end{array} \qquad (4.45)$$

Die Wellengleichung in der kanonischen Basis, Gl. (2.36), ist also gegenüber Raum- und Zeitspiegelung invariant. Anders die Wellengleichung in den Spinorbasen: ein Spinor wird unter Raumspiegelung in den zu ihm konjugierten Spinor überführt, wie man aus der Definition (3.23) entnimmt. Die Gleichung in der Spinorbasis geht also unter Raumspiegelung in die Gleichung in der dazu konjugierten Spinorbasis über. Unter Zeitumkehr dagegen transformieren sich $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{N}=i\boldsymbol{S}$, wenn wir zum Beispiel die (so)-Darstellung betrachten, in $\boldsymbol{J}=-\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{N}=-i\boldsymbol{S}$. Bekanntlich ist nun

$$d^s(\pi)\,\boldsymbol{S}\,d^{s-1}(\pi) = -\boldsymbol{S}, \qquad (4.46)$$

wobei $d^s(\pi)$ die Matrix der Drehung um den Winkel π um die y-Achse bedeutet[35]. Wir finden also, daß unter Zeitumkehr die Gleichung in einer Spinorbasis $\{\dot{A}|$ in die Gleichung in einer dazu äquivalenten Spinorbasis $d^s(\pi)\{\dot{A}|$ übergeht. In der Einleitung haben wir schon angedeutet, daß das Transformationsverhalten der Spinoren unter Spiegelung die Matrixelemente nicht berührt, weil diese aus

Spinor und konjugiertem Spinor symmetrisch gebildet werden; man sieht dies an der Definition der Skalarprodukte (4.38), (4.41).

4.5. *Gültigkeit der Wellengleichung in inhomogenen Feldern*

Die Wellengleichungen wurden für den Fall homogener elektromagnetischer Felder abgeleitet; diese Bedingung ging in Gl. (2.4) bzw. (2.9) ein. Für geladene Teilchen läßt sich die mögliche Korrektur, die durch eine Inhomogenität der Felder nötig wird, durch die dimensionslose Konstante

$$\gamma = \lambda\!\!\!^{-}/|F| \cdot (|\partial F'| + |\partial_0 F''|) \cdot \mu/\mu_n \qquad (4.47)$$

nach oben hin abschätzen; dabei ist $\lambda\!\!\!^{-}$ die Compton-Wellenlänge des betrachteten Teilchens, und F, F', F'' stehen jeweils für die elektrische oder magnetische Feldstärke: Solange die relative räumlich-zeitliche Variation des Feldes klein gegen die Compton-Wellenlänge des Teilchens ist, werden unsere Gleichungen in guter Näherung auch für inhomogene Felder gelten. Zahlenbeispiel: Für das Elektron im atomaren Feld auf der niedrigsten Bohrschen Bahn ist γ von der Größenordnung 10^{-2}.

Wir mögen ein Gefühl für die Zuverlässigkeit der Gleichungen in inhomogenen Feldern daraus entnehmen, daß einmal die Dirac-Gleichung, ein Spezialfall für Spin 1/2, die Feinstruktur des Wasserstoffatoms gut erklärt; zum andern liefern sie bei kleinen Geschwindigkeiten den Ausdruck für die Kraft auf ein spinnendes Teilchen in statischen Feldern, den wir erwarten, nämlich

$$\dot{\boldsymbol{P}} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}/m \times \boldsymbol{B}) - \mu\, \partial(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}). \qquad (4.48)$$

Multipolmomente von Teilchen höheren Spins werden von unseren Gleichungen allerdings nicht beschrieben.

Beim Wechsel von einer Basis zur andern wurde nicht benutzt, daß die Felder homogen waren. Wir können das Argument also auch umkehren: Gilt die Wellengleichung, auch mit schwachen inhomogenen Feldern, in einer Basis, so auch in den beiden andern. Dies können wir anwenden beim Übergang von der Dirac-Gleichung in inhomogenen Feldern zur Pauli-Gleichung: Man transformiert von den Spinorbasen in die kanonische Basis und betrachtet die Wellengleichung bei kleinen Geschwindigkeiten.

5. Zusammenfassung

In erster Näherung haben wir dieses vierzig Jahre alte Problem gelöst, wie relativistische Teilchen mit beliebigem Spin und beliebigem magnetischen Moment im elektromagnetischen Feld zu beschreiben sind. Wir haben uns dabei noch auf homogene Felder beschränkt.

Wir fanden, daß die Schwierigkeiten, die in früheren Lösungsversuchen auftraten, im wesentlichen darauf zurückzuführen sind, daß man Beziehungen zwischen verschiedenen Hilbert-Raumbasen bereits als Wellengleichung ansah: man verlangte von dieser Wellengleichung zuviel, von ihrer Interpretation zuwenig. Die einzige von der Interpretation her brauchbare Wellengleichung für ein freies Teilchen ist eine Art Klein-Gordon-Gleichung für beliebigen Spin.

Wir entschieden die bisher offene Frage nach einem brauchbaren Formalismus, um vom relativistischen Hamilton-Operator (oder, klassisch, von der relativistischen Hamilton-Funktion) zur Bewegungsgleichung zu gelangen, zugunsten der Eigenzeitformulierung der Hamiltonschen Gleichungen[18, 19]. Damit scheiden gewisse Formen relativistischer „Hamilton-Operatoren" aus, insbesondere alle, die von erstem Grade in K sind. Ein Beispiel ist der Diracsche „Hamilton-Operator". Die Dirac-Gleichung selbst wird von dieser Bemerkung nicht berührt, nur die Interpretation gewisser Operatoren als Ort, Geschwindigkeit usw., die zu so unphysikalischen Effekten wie der Zitterbewegung bei einem freien Teilchen führen (eine Diskussion finden wir bei ARUNASALAM[40]).

Nach unserem jetzigen Verständnis ist die Dirac-Gleichung ein ungemein glücklicher Wurf: Zufällig stimmt die Gleichung, die man durch Jonglieren mit einer Algebra erhält, welche indirekt mit den Spinmatrizen zusammenhängt, für Spin 1/2 bei Ankopplung des Feldes überein mit der Gleichung für das Elektron im elektromagnetischen Feld. Diese „Ableitung" läßt sich jedoch auf Teilchen höheren Spins als eins nicht anwenden.

Die Theorie relativistischer Teilchen mit Spin im elektromagnetischen Feld ist, soweit man sie durch Wellengleichungen beschreiben kann, durchsichtiger geworden. Wir sehen diese Arbeit als einen Beitrag zur Lösung der eigentlichen Aufgabe, eine Quantenfeldtheorie für Teilchen beliebigen Spins zu entwickeln; in diesem Sinne ist sie als eine erste Näherung an das Problem der relativistischen Beschreibung von wechselwirkenden Teilchen anzusehen.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. GEORG SÜSSMANN, bin ich für klärende Diskussionen besonders verbunden. Er bewahrte mich vor unfruchtbaren Wegen, indem er mich lehrte, physikalisch und nicht formalistisch zu denken. — Herrn Dr. K. HELMERS möchte ich posthum für einige wertvolle Diskussionen danken.

Anhang

A.I) *Die Form der Erzeugenden infinitesimaler Drehungen in der kanonischen Basis*

Die Lorentz-Transformation, die den Vierervektor p in den Vierervektor p' überführt,

$$(L_{p'p})_\mu{}^\nu p_\nu = p'_\mu, \quad \text{mit} \quad p^2 = p'^2 = m^2, \tag{I.1}$$

lautet

$$(L_{p'p})_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu - \frac{1}{m^2 + p p'} \left[p_\mu p^\nu + p_\mu p'^\nu + p'_\mu p'^\nu - \left(1 + \frac{2 p p'}{m^2}\right) p'_\mu p^\nu \right]. \tag{I.2}$$

Damit wird die Schnellung L_p gleich

$$(L_p)_\mu{}^\nu := (L_{p_R p})_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu - \frac{1}{m(m + p^0)} [p_\mu p^\nu + m p_\mu \delta_0^\nu + m^2 \delta_\mu^0 \delta_0^\nu - (m + 2 p^0) \delta_\mu^0 p^\nu]. \tag{I.3}$$

Die Rückschnellung ist

$$(L_p^{-1})_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu - \frac{1}{m(m + p^0)} [p_\mu p^\nu + m \delta_\mu^0 p^\nu + m^2 \delta_\mu^0 \delta_0^\nu - (m + 2 p^0) p_\mu \delta_0^\nu]. \tag{I.4}$$

Für die Wigner-Drehung (3.18) erhält man

$$\begin{aligned}(R_{\Lambda,p})_\mu{}^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu + \frac{1}{(m + p^0)(m + p'^0)} \,, [&(\Lambda_0{}^0 - 1) p'_\mu p^\nu + (p^0 + m \Lambda_0{}^0) p'_\mu \delta_0^\nu - (m + p'^0) \Lambda_\mu{}^0 (p^\nu + m \delta_0^\nu) \\ &+ (p'^0 + m \Lambda_0{}^0) \delta_\mu^0 (p^\nu + m \delta_0^\nu) + (m + p^0)(- p'_\mu \Lambda_0{}^\nu - m \delta_\mu^0 \Lambda_0{}^\nu + m \delta_\mu^0 \delta_0{}^\nu)].\end{aligned} \tag{I.5}$$

Hierbei haben wir $p' = \Lambda p$ gesetzt. Für infinitesimale Transformationen

$$\Lambda(\alpha\beta) := 1 + \varepsilon \underline{J}_{\alpha\beta} \tag{I.6}$$

nimmt die Wigner-Drehung die Form

$$\begin{aligned}(R_{\Lambda(\alpha\beta),p})_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu - \varepsilon \{ g_{\alpha\mu} \delta_\beta^\nu - g_{\beta\mu} \delta_\alpha^\nu - \frac{1}{m + p^0} [&(p_\mu + m \delta_\mu^0)(g_{\alpha 0} \delta_\beta^\nu - g_{\beta 0} \delta_\alpha^\nu) \\ &+ (g_{\alpha\mu} \delta_\beta^0 - g_{\beta\mu} \delta_\alpha^0)(p^\nu + m \delta_0^\nu)]\}\end{aligned} \tag{I.7}$$

an. Daraus entnehmen wir

$$(R_{\Lambda(ik),p})_\mu{}^\nu = (1 + \varepsilon \underline{J}_{ik})_\mu{}^\nu \tag{I.8}$$

und

$$\begin{aligned}(R_{\Lambda(oi),p})_\mu{}^\nu &= \delta_\mu^\nu - \varepsilon \frac{1}{m + p^0} (g_{ik} p^l - p_k \delta_i^l) \delta_\mu^k \delta_l^\nu = \delta_\mu^\nu - \varepsilon \frac{1}{m + p^0} p^m (g_{ik} \delta_m^l - g_k m \delta_i^l) \delta_\mu^k \delta_l^\nu \\ &= \left(1 + \varepsilon \frac{1}{m + p^0} p^m \underline{J}_{im}\right) \mu^\nu .\end{aligned} \tag{I.9}$$

Schließlich wird

$$\begin{aligned}U(\Lambda(i k)) | p \sigma \rangle &= (1 - i \varepsilon J_{ik}) | p \sigma \rangle = | (1 - \varepsilon \underline{J}_{ik}) p, \sigma' \rangle D^s_{\sigma'\sigma}(R_{\Lambda(ik),p}) \\ &= (1 - i \varepsilon (\mathscr{X}_i P_k - \mathscr{X}_k P_i))(1 - i \varepsilon \mathscr{S}_{ik}) | p \sigma \rangle .\end{aligned} \tag{I.10}$$

Hierbei benutzten wir die im aktiven Standpunkt, den wir einnehmen, gültige Beziehung

$$D^s(R_{\Lambda(ik),p}) = D^s(1 + \varepsilon \underline{J}_{ik}) = 1 - i \varepsilon \mathscr{S}_{ik} \tag{I.11}$$

mit $\mathscr{S}_{ik} = \varepsilon^{ikl} S^l$ und setzten

$$\mathscr{X}_\mu | p \sigma \rangle = i \, \partial / \partial p^\mu | p \sigma \rangle . \tag{I.12}$$

Die Differentiation findet unter der Nebenbedingung $p^2 = m^2$ statt. Aus Gl. (I.10) lesen wir ab

$$J_{ik} | p \sigma \rangle = (\mathscr{X}_i P_k - \mathscr{X}_k P_i + \mathscr{S}_{ik}) | p \sigma \rangle , \tag{I.13}$$

anders

$$\boldsymbol{J} | p \sigma \rangle = (\boldsymbol{\mathscr{X}} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{S}) | p \sigma \rangle . \tag{I.14}$$

Analog erhalten wir

$$J_{0k}\,|\,p\,\sigma\rangle = (\mathscr{X}_0\,P_k - \mathscr{X}_k\,P_0 + \mathscr{S}_{0k})\,|\,p\,\sigma\rangle \tag{I.15}$$

mit $\mathscr{S}_{0k} = \frac{1}{m + p^0}\,\mathscr{S}_{kl}\,P^l$.

Berücksichtigt man noch die Nebenbedingung $p^2 = m^2$ in der Form

$$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\,, \tag{I.16}$$

so findet man wegen

$$p_0\,\frac{\partial}{\partial p^k}\,|\boldsymbol{p}\rangle = p_0\left(\frac{\partial}{\partial p^k} + \frac{\partial p^0}{\partial p^k}\,\frac{\partial}{\partial p^0}\right)|\,p^0, \boldsymbol{p}\rangle = \left(p_0\,\frac{\partial}{\partial p^k} - p_k\,\frac{\partial}{\partial p^0}\right)|\,p\rangle\,, \tag{I.17}$$

daß $\mathscr{X}_0\,P_k - \mathscr{X}_k\,P_0$ dann als $-P_0\,\mathscr{X}_k$ verstanden werden muß. Damit schreiben wir Gl. (I.15) als

$$\boldsymbol{N}\,|\,\boldsymbol{p}\,\sigma\rangle = (P^0\,\mathscr{X} + [1/(m + P^0)]\,\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S})\,|\,\boldsymbol{p}\,\sigma\rangle\,. \tag{I.18}$$

In der Form (I.14) und (I.18) wurden die Darsteller der infinitesimalen Erzeugenden auch von Joos [6] und Shirokov [33] angegeben.

A.II) Π^s-, D^s-, $\dot{D}^s$-*Matrizen*

Die Π^s-Matrizen sind definiert durch

$$\Pi^s(p/m) := D^s(L_p^{-1})\,\dot{D}^s(L_p) = D^s(L_p^{-1})\,D^{s*}(L_p^{-1})\,. \tag{II.1}$$

Sie transformieren sich unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$\Pi^s(\Lambda\,p/m) = D^s(\Lambda)\,\Pi^s(p/m)\,D^{s*}(\Lambda)\,. \tag{II.2}$$

Wir zeigen jetzt, daß die Matrixelemente $\Pi^s_{AB}(p/m)$ Polynome vom Grade $\leqq 2s$ in den p^μ/m sind: $-\underline{N}^3 = -\underline{J}_{03}$ erzeugt die Schnellungen $L^{-1}(p^0, 0, 0, p^3)$ in Richtung der z-Achse. Für eine beliebige Schnellung gilt

$$L_p^{-1} = R[(p^0, 0, 0, p^3) \to (p^0, \boldsymbol{p})]\,L^{-1}(p^0, 0, 0, p^3) = R\exp(-\zeta\,\underline{N}^3) \tag{II.3}$$

mit

$$\zeta = \operatorname{Arsinh} p^3/m = \operatorname{Arcosh} p^0/m\,. \tag{II.4}$$

In dieser Weise spalten wir die Winkelabhängigkeit der Schnellung von ihrer Abhängigkeit vom Betrag des (Dreier-)Impulses ab. Bis auf eine Drehung ist also $D^s(L_p^{-1})$ gleich $\exp(-\zeta\,S^3)$; damit sind die Matrixelemente $\Pi^s_{AB}(p/m)$ in einer Darstellung, in der S^3 diagonal ist, gleich

$$\Pi^s_{AB}(p/m) = D^s_{AC}(R)\exp(-2\,C\,\zeta)\,D^s_{CB}(R) = D^s_{AC}(R)\left(\frac{p^0}{m} \pm \frac{p^3}{m}\right)^{-2|C|} D^s_{CB}(R)\,; \tag{II.5}$$

hierbei gilt das positive Vorzeichen, wenn $C > 0$ ist. Der größtmögliche Exponent des Polynoms ist $2s$. Durch die Drehung geht p^3 über in eine Linearkombination der Komponenten von $\boldsymbol{p}$. Daraus folgt die Behauptung.

Multiplizieren wir $\Pi^s(p/m)$ mit m^{2s}, und drücken wir weiter m^2 durch p^2 aus, so erhalten wir für die Matrixelemente $\Pi^s_{AB}(p)$ homogene Polynome vom Grade $2s$ in den p^μ: Aus Gl. (II.5) entnehmen wir, daß nur gerade Potenzen von m in diesen Polynomen auftreten [$2(s - C)$ ist gerade]; somit ist $\Pi^s(p)$ ein ganz rationales Polynom in p^μ. Wir setzen daher $\Pi^s(p)$ an als [3,37]

$$\Pi^s(p) = m^{2s}\,D^s(L_p^{-1})\,D^{s*}(L_p^{-1}) = t^{\mu_1\cdots\mu_{2s}}\,p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{2s}}\,. \tag{II.6}$$

Die Matrizen $t^{\mu_1\cdots\mu_{2s}}$ sind bezüglich der Indizes μ_i symmetrisch. Fordern wir, daß sie in allen Bezugssystemen gleich sein sollen, so muß für sie die Beziehung gelten:

$$D^s(\Lambda)\,t^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}\,D^{s*}(\Lambda) = t^{\nu_1\cdots\nu_{2s}}\,\Lambda_{\nu_1}{}^{\mu_1}\cdot\ldots\,\Lambda_{\nu_{2s}}{}^{\mu_{2s}}\,. \tag{II.7}$$

Diese Gleichung nützen wir für die Berechnung der $t^{\{\mu\}}$ und schließlich der $\Pi^s(p)$ aus. Betrachten wir infinitesimale Transformationen, so lautet Gl. (II.7)

$$(1 - i\,\varepsilon\,J_{\varrho\sigma})\,t^{\mu_1\cdots\mu_{2s}}(1 + i\,\varepsilon\,J^*_{\varrho\sigma}) = (1 - \varepsilon\,\underline{J}_{\varrho\sigma})_{\nu_1}{}^{\mu_1}\cdot\ldots\,(1 - \varepsilon\,\underline{J}_{\varrho\sigma})_{\nu_{2s}}{}^{\mu_{2s}}\,t^{\nu_1\cdots\nu_{2s}}\,, \tag{II.8}$$

und wir bekommen die Beziehung

$$i\,(J_{\varrho\sigma}\,t^{\{\mu\}} - t^{\{\mu\}}\,J^{*}_{\varrho\sigma}) = \sum_{\lambda=1}^{2s} (J_{\varrho\sigma})\,\nu^{\mu_\lambda}_{\lambda}\,t^{\mu_1\ldots\nu_\lambda\ldots\mu_{2s}} = \sum_{\lambda=1}^{2s} (g_{\varrho\nu_\lambda}\,\delta^{\mu_\lambda}_{\sigma} - \delta^{\mu_\lambda}_{\varrho}\,g_{\sigma\nu_\lambda})\,t^{\mu_1\ldots\nu_\lambda\ldots\mu_{2s}}\,. \tag{II.9}$$

Setzen wir speziell $\varrho = 0$, $\sigma = 1$, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\sum_{\lambda=1}^{2s} \delta_0^{\mu_\lambda}\,t^{\mu_1\ldots}{}_{i}{}^{\ldots\mu_{2s}} = \sum_{\lambda=1}^{2s} \delta_i{}^{\mu_\lambda}\,t^{\mu_1\ldots}{}_{0}{}^{\ldots\mu_{2s}} + i\,(N^i\,t^{\{\mu\}} + t^{\{\mu\}}\,N^{i*}) \tag{II.10}$$

oder, da wir in der Spinordarstellung rechnen,

$$\sum_{\lambda=1}^{2s} \delta_0^{\mu_\lambda}\,t^{\mu_1\ldots i\ldots\mu_{s2}} = -\sum_{\lambda=1}^{2s} \delta_i^{\mu_\lambda}\,t^{\mu_1\ldots 0\ldots\mu_{2s}} + S^i\,t^{\{\mu\}} + t^{\{\mu\}}\,S^i\,. \tag{II.11}$$

Sie bedeutet: Sei ein Indexsatz $\{\mu\} = \mu_1 \ldots \mu_{2s}$ gegeben. Dann ist die linke Seite der Gleichung eine Summe von Ausdrücken, in denen ein Index 0 durch i ersetzt ist; auf der rechten Seite ist entsprechend im ersten Teil der Index i durch 0 ersetzt. Wir können daher jedes $t^{\{\mu\}}$ auf die $t^{\{\nu\}}$ mit einem bzw. zwei Indizes 0 mehr zurückführen; ein allgemeines $t^{\{\mu\}}$ läßt sich rekursiv aus $t^{0\cdots 0}$ berechnen. $t^{0\cdots 0}$ wiederum ist leicht aus Gl. (II.6) im Ruhesystem abzulesen:

$$\Pi^s(m, 0) = m^{2s} = t^{0\cdots 0}\,m^{2s}, \quad \text{also} \quad t^{0\cdots 0} = 1\,. \qquad \text{(II.12), (II.13)}$$

Diese hübsche Methode wurde von TUNG[3] angegeben.

Die Konstruktion eines unter Lorentz-Transformationen invarianten Vektors aus zweidimensionalen Matrizen, auf welcher der Spinorkalkül für $s = 1/2$ aufbaut[41], ist auf beliebige Spins einfach zu verallgemeinern, indem man aus den $(2s+1)$-dimensionalen Spinmatrizen in der beschriebenen Weise Tensoren von $2s$-ter Stufe bildet[37].

Als Beispiele berechnen wir die Formeln für $s = 1/2$ und $s = 1$:

$$\begin{aligned} &s = \tfrac{1}{2}:\ t^0 = 1\,; \qquad t^i = 2\,S^i\,; \qquad \Pi^{1/2}(p) = p^0 - 2\,\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}\,; \\ &s = 1:\ t^{00} = 1\,; \qquad t^{i0} = t^{0i} = S^i\,; \qquad t^{ik} = -\,\delta_i^k + S^i S^k + S^k S^i\,; \\ &\Pi^1(p) = p_0{}^2 - \boldsymbol{p}^2 - 2\,p^0\,\boldsymbol{S}\boldsymbol{p} + 2\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p})^2\,. \end{aligned} \tag{II.14}$$

Die $\Pi^{s-1}(p)$ erhalten wir aus den $\Pi^s(p)$, indem wir $\boldsymbol{p}$ durch $-\boldsymbol{p}$ ersetzen. Wir sehen dies bei genauer Betrachtung der Gln. (II.3) f oder auch aus einer anderen Schreibweise der $\Pi^s(p/m)$: Wie $-\underline{N}^3$ die Schnellungen in Richtung der z-Achse erzeugt, so $-\boldsymbol{e}\,\underline{\boldsymbol{N}}$ die Schnellungen in Richtung von $\boldsymbol{e}$:

$$L_p^{-1} = \exp(-\,\zeta\,\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{N}) \quad \text{mit} \quad \zeta = \operatorname{Arsinh}|\boldsymbol{p}|/m = \operatorname{Arcosh} p^0/m\,. \qquad \text{(II.15), (II.16)}$$

Entsprechend wird

$$D^s(L_p^{-1}) = D^{s*}(L_p^{-1}) = \dot{D}^s(L_p) = \exp(-\,\zeta\,\boldsymbol{e}_p\,\boldsymbol{S})\,, \qquad D^s(L_p) = \exp(\zeta\,\boldsymbol{e}_p\,\boldsymbol{S}) \tag{II.17}$$

und

$$\Pi^s(p/m) = \exp(-\,2\,\zeta\,\boldsymbol{e}_p\,\boldsymbol{S})\,, \qquad \Pi^{s-1}(p/m) = \exp(+\,2\,\zeta\,\boldsymbol{e}_p\,\boldsymbol{S})\,, \tag{II.18}$$

wobei

$$\boldsymbol{e}_p = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{II.19}$$

ist. Aus diesen Gleichungen schließen wir weiter

$$D^s(L_p^{-1}) = \exp(-\,\zeta\,\boldsymbol{e}_p\,\boldsymbol{S}) = \exp(-\,2\,\xi\,\boldsymbol{e}_p\,\boldsymbol{S}) \tag{II.20}$$

mit

$$\xi = \zeta/2 = \operatorname{Arsinh}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\sqrt{2m}\sqrt{m + p^0}} = \operatorname{Arcosh}\frac{\sqrt{p^0 + m}}{\sqrt{2m}}\,, \tag{II.21}$$

dies wegen

$$\sinh\xi = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(\cosh 2\,\xi - 1)}\,, \qquad \cosh\xi = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(\cosh 2\,\xi + 1)}\,. \tag{II.22}$$

Die explizite Form der $D^s(L_p^{-1})$ ergibt sich also aus der Form der $\Pi^s(p/m)$, indem wir ersetzen:

$$\frac{p^0}{m} \to \frac{\sqrt{p^0+m}}{\sqrt{2m}}, \qquad \frac{\boldsymbol{p}}{m} \to \frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{2m}\sqrt{p^0+m}}. \tag{II.23}$$

Für $s = 1/2$ und $s = 1$ bekommen wir

$$D^{1/2}(L_p^{-1}) = \frac{1}{2m}\left(\sqrt{p^0+m} - 2\frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{\sqrt{p^0+m}}\right), \qquad D^1(L_p^{-1}) = 1 - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{m} + \frac{(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p})^2}{m(p^0+m)}. \tag{II.24}$$

Wir wollen nun die führenden Terme von Π^s, D^s für kleine Geschwindigkeiten bestimmen. Aus den Gln. (II.11), (II.13) folgt

$$\Pi^s(p/m) = \left(\frac{p^0}{m}\right)^{2s} - 2\frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{m}\frac{p^0}{m}\left(\frac{p^0}{m}\right)^{2s-1} + p^i p^k \tilde{T}^{ik} \tag{II.25}$$

und daraus

$$D^s(L_p^{-1}) = \left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^s - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{m}\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{s-1} + p^i p^k T^{ik}. \tag{II.26}$$

Für kleine Geschwindigkeiten haben wir

$$\Pi^s(p/m) = 1 - 2\frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{m} + p^i p^k \tilde{T}^{ik} + O\left(\frac{p^0-m}{m}\right), \quad D^s(L_p^{-1}) = 1 - \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{m} + p^i p^k T^{ik} + O\left(\frac{p^0-m}{m}\right). \tag{II.27}$$

Wir sehen aus den Gln. (II.25), (II.26), daß für

$$P = G + O(\eta m), \tag{II.28}$$

wobei $\eta \ll 1$ ist, auch

$$\Pi^s(P/m) = \Pi^s(G/m) + O(\eta), \qquad D^s(L_P^{-1}) = D^s(L_G^{-1}) + O(\eta) \tag{II.29}$$

gilt.

Abschließend bestimmen wir noch die Größenordnung des Unterschiedes der Ortsoperatoren in den verschiedenen Basen. Zum Beispiel ist nach Gl. (3.36)

$$\Xi_k - \mathscr{X}_k = D^s(L_p^{-1}) \cdot i \frac{\partial}{\partial p^k} D^s(L_p); \tag{II.30}$$

mit Gl. (II.17) finden wir

$$\begin{aligned} D^s(L_p^{-1}) \cdot i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} D^s(L_p) &= \exp(-\zeta\, \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{S}) \cdot i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \exp(\zeta\, \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{S}) \\ &= \boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p})\left(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2 p^0} - \frac{\zeta}{|\boldsymbol{p}|^3}\right) + \frac{\zeta}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{S} \lesssim \boldsymbol{e}_p(\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_p)\left(\frac{1}{p^0} - \frac{1}{m}\right) + \frac{\boldsymbol{S}}{m}, \end{aligned} \tag{II.31}$$

die letzte Zeile wegen

$$\zeta \lesssim |\boldsymbol{p}|/m. \tag{II.32}$$

Der Unterschied ist damit von der Ordnung $1/m$, d.i. von der Ordnung der Compton-Wellenlänge des betrachteten Teilchens.

1 P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London **117**, 610 [1928].

2 E. M. CORSON, „Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations", Blackie & Son, Glasgow 1953.

3 W.-K. TUNG, Phys. Rev. Lett. **16**, 763 [1966]; Phys. Rev. **156**, 1385 [1967].

4 Vielleicht noch verblüffender ist, daß es zur richtigen Vorhersage des inneren gyromagnetischen Verhältnisses des Elektrons gar keiner relativistischen Gleichung bedarf. Der Diracsche Ansatz liefert es, analog angewandt, schon bei einer nur galileiinvarianten Gleichung[5].

5 J.-M. LÉVY-LEBLOND, Comm. Math. Phys. **6**, 286 [1967].

6 H. JOOS, Fortschritte der Physik **10**, 65 [1962].

7 Der strenge Beweis für diese Behauptung steht noch aus; für die Spins 3/2 und 2 wurde sie von Tung jedoch nachgewiesen.

8 R. P. FEYNMAN, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 [1948]; Phys. Rev. **84**, 108 [1951].

9 R. P. FEYNMAN u. M. GELL-MANN, Phys. Rev. **109**, 193 [1958].

10 W. R. THEIS, Fortschr. d. Phys. **7**, 559 [1959].

11 L. M. BROWN, Phys. Rev. **111**, 957 [1958].

12 Die Gln. (1.8) entstehen aus der Dirac-Gleichung (1.4) durch Projektion auf den Raum derjenigen Viererspinoren, deren zwei obere bzw. untere Komponenten identisch verschwinden. — Da die Gleichungen einzeln un-

ter Raumspiegelung nicht invariant bleiben, lassen sich ihre Lösungen besonders bequem bei der Beschreibung der paritätsverletzenden schwachen Wechselwirkung verwenden[9,10].

[13] D. ZWANZIGER, in: Proceedings of the Symposium on the Lorentz Group, Bd. VII a), Seventh Annual Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder 1964.

[14] J. M. JAUCH, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1968; insbes. Ch. 14–6.

[15] W. PAULI, Rev. Mod. Phys. **13**, 203 [1941].

[16] H. A. BETHE u. E. E. SALPETER, Handbuch der Physik XXXV/1, Springer-Verlag, Berlin 1957.

[17] W. PAULI, Z. Phys. **43**, 601 [1927].

[18] H. C. CORBEN u. P. STEHLE, Classical Mechanics, John Wiley, New York 1950; insbes. Ch. 15, § 88, Ch. 17.

[19] H. GOLDSTEIN, Klassische Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt (Main) 1963; insbes. Kapitel VII.

[20] D'ANS-LAX, Taschenbuch für Chemiker und Physiker, hrsgg. von K. SCHÄFER und C. SYNOWIETZ, Bd. III, Springer, Berlin 1970.

[21] Die Pauli-Gleichung liefert auch hier noch einen Term $(-q^2/4m^3)(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E})(\boldsymbol{S}\boldsymbol{E})$, den wir aber in unserer Näherung vernachlässigen.

[22] Bei der Transformation benutzen wir für die im klassischen Sinne aufgefaßten Größen die Eigenwertsymbole der entsprechenden quantenmechanischen Operatoren.

[23] V. BARGMANN, L. MICHEL u. V. L. TELEGDI, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 [1959].

[24] V. B. BERESTEZKIJ, E. M. LIFSHIZ u. L. P. PITAJEVSKIJ, Reljativistskaja Kvantovaja Teorija (Bd. IV der Theoretischen Physik von L. D. LANDAU u. E. M. LIFSHIZ) Teil 1, Verlag Nauka, Moskau 1968.

[25] Dieser Ansatz ist nur bequem; man kann den Spin auch als räumlichen Anteil eines antisymmetrischen Vierertensors auffassen, wodurch man auf kompliziertere Weise zum selben Ergebnis kommt[26].

[26] J. FRENKEL, Z. Phys. **37**, 243 [1926].

[27] Zur Frage, welches magnetische Moment ein elementares Teilchen beliebigen Spins bei minimaler Kopplung an das elektromagnetische Feld haben sollte[12,28].

[28] C. R. HAGEN u. W. J. HURLEY, Phys. Rev. Lett. **24**, 1381 [1970].

[29] Die beiden gyromagnetischen Verhältnisse unterscheiden sich u.a. dadurch, daß bei kleinen Geschwindigkeiten das normale zum Thomas-Faktor 1/2 beim Spinbahnterm Anlaß gibt wie in der Pauli-Gleichung (1.9), das anomale nicht[24,30,31,32]. Man sieht dies leicht an Gl. (2.23) oder (2.14) ein.

[30] L. H. THOMAS, Nature London **107**, 514 (1926).

[31] J. D. JACKSON, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York 1962; insbes. Sect. 11.5.

[32] W. DONNER u. G. SÜSSMANN, Erg. exakt. Naturwiss. **37**, 1 [1964].

[33] JU. M. SHIROKOV, Sov. Phys.-JETP New York **6**, 664, 919 [1958].

[34] E. P. WIGNER, Ann. Math. **40**, 149 [1939].

[35] A. R. EDMONDS, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press 1957.

[36] W. PAULI, Continuous Groups in Quantum Mechanics, CERN Report 56–31, Genf 1956.

[37] S. WEINBERG, Phys. Rev. **133**, B1318 [1964].

[38] S. S. SCHWEBER, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper & Row, New York 1961.

[39] E. P. WIGNER, Göttinger Nachrichten **31**, 546 [1932].

[40] V. ARUNASALAM, Amer. J. Phys. **38**, 1010 [1970].

[41] B. L. VAN DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin 1932.